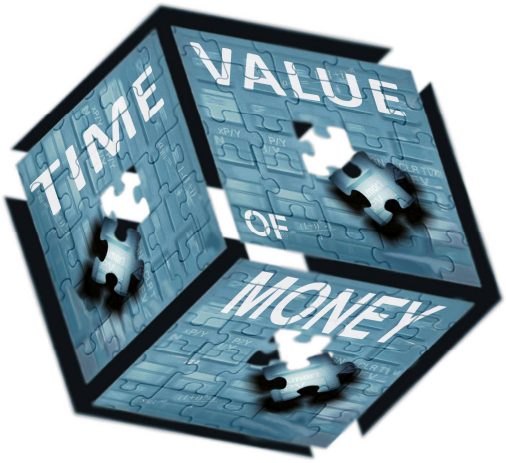


Rogério Matias

Mert Kalyoncu tarafından çevrildi

PARANIN ZAMAN DEĞERİ
ÜZERİNE
KISA NOTLAR

1. Sürüm - Mayıs 2016

Sürüm 17.05.24

www.time-value-of-money.com

İÇİNDEKİLER

Kendim Hakkında ve Notlar Üzerine Birkaç Söz 3
Önceki Sürümler 4
1. GİRİŞ 5
1.1 - Paranın Zaman Değeri. 5
1.2 - Anahtar değişkenler: para, zaman, faiz oranı. 6
1.3 -Faiz: neden ve nasıl ? 7
2. BASİT FAİZ VE BİLEŞİK FAİZ 8
2.1 - Basit faiz. Basit faiz altında faiz oranları. 8
2.2 - Bileşik faiz. Bileşik faiz altında faiz oranları. Yıllık nominal faiz oranı (NOM) ve yıllık efektif faiz oranı (EFF) 9
2.3 - Gün Sayma Kuralları (İki tarih arasındaki gün sayısını hesaplama) 12
Alıştırmalar 15
3. NAKİT AKIMLARI ARASINDA DENKLİK 17
3.1 - Denklik: basit faiz ve bileşik faiz varsayımı altında faizlendirme ve iskontolama. basit faiz varsayımı altında iskontolamanın zayıflıkları ve bileşik faiz varsayımında iskontolamanın güçlü yanları. 17
3.2 - Denklik faktörleri. 19
Alıştırmalar 23
4. ANÜİTELER 24
4.1 - Anüitenin tanımı. Önemli konular. Anüite çeşitleri. 24
4.2 - Basit anüitenin gelecek değeri 26
4.3 - Basit anüitenin bugünkü değeri. 27
4.4 - Herhangi bir andaki anüitenin değeri. 28
4.5 - Genel anüitelerde ''uzatma'' 31
4.6 - Devamlı Eşit Ödemeler (Perpetuity). 35
Alıştırmalar 37
5. BORÇLARIN AMORTİZASYONU 40
5.1 - Temel kavramlar ve anahtar değişkenler. 40
5.2 - Amortizasyon tablosu. 41
5.3 - Borç tutarlarını amortize etmek için iki sistem. 41
Alıştırmalar 54
6. YATIRIM DEĞERLEMESİNİN TEMELLERİ 55
6.1 - Somut yatırımlar ve finansal yatırımlar. 55
6.2 - Somut yatırımların evrimi. 55
6.3 - Finansal yatırımların evrimi. 56
Alıştırmalar 59

Kendim Hakkında ve Notlar Üzerine Birkaç Söz

Ben Portekizli bir öğretmenim. Neredeyse 30 yıldır, Viseu Politeknik Enstitüsü'nün 5 bölümünden biri olan Teknoloji ve Yönetim Bilimleri Yüksekokulu'nda ders veriyorum.

En sevdiğim ders ise paranın zaman değerine ve bununla ilgili gerçek hayattan uygulamalara dayanan *Finansal Kalkülüs* dersi.

Birkaç yıl önce birçok farklı Avrupa ülkesinden (çoğunlukla Almanya, İspanya, Litvanya, Polonya, Türkiye ve Yunanistan) benim Erasmus'a özel hazırladığım *Paranın Zaman Değeri* dersimi seçen Erasmus öğrencilerine ders vermeye başladım.

Finansal Kalkülüs ile ilgili bazı akademik kitaplar yazdım, ve bunlar
sadece Portekiz'de değil, diğer Portekizce konuşulan Angola, Mozambik, Cabo Verde ve Brezilya gibi ülkelerdeki bazı üniversitelerde de okutuldu.

Akademik materyal hazılamak benim sevdiğim bir şey. Bu yüzden, *Paranın Zaman Değeri* dersime katılan Erasmus öğrencilerine yardımcı olmak için İngilizce bazı notlar hazırlamaya karar verdim.

Daha sonra zaman geçtikçe bazıları benimle tekrar iletişim kurdu ve bu basit notların onlar için sonraları hem öğrenim hayatlarında hem de iş hayatlarında dahi kullanışlı olduğunu söylediler.

Bu bana notların diğer öğrenciler için de kullanışlı olabileceğini düşündürdü.

Bu yüzden de notları özel bir internet sitesinde ücretsiz olarak paylaşmaya karar verdim. (www.time-value-of-money.com).

Bu notları herkes indirebilir. Bununla beraber web sayfama olumlu veya olumsuz görüş bırakırsanız çok memnun olacağım. Görüşünüz, öneriniz, düzeltmeniz benim için gerçekten çok anlamlı ve önemli.

Son bir not : metin boyunca, hem Euro'yu hem de Amerikan Doları'nı para birimi olarak kullanacağım. Bu yüzden de Avrupa ve Amerika tipi noktalamaların ikisi de kullanılacak. Örneğin, €1.234,56 veya $1,234.56 gibi. Ayrıca €0,05 ve $0.05 gibi.

Bu notları yararlı bulmanızı içtenlikle umut ediyorum.

Önceki Sürümler

Sürüm	Değişiklikler	Sayfa Sayısı
16.05.22	EMI'ye referans – Equated Monthly Installment	42
16.04.24	İlk halka açık yayın	

1. GİRİŞ

1.1 - Paranın Zaman Değeri.

€1.000'luk bir ödül kazandığını hayal et, bunu bugün mü yoksa bugünden tam bir yıl sonra mı almak istediğin soruluyor. Tabi ki bugün almayı tercih edersin.

Aslında, aynı tutardaki paraları bizim için erişilebilir olduğu ana göre farklı değerliyoruz. Bize daha yakın bir zamanda verilecek bir parayı daha değerli olarak görme eğilimindeyiz. Neden ? Bunun için bazı iyi nedenler bulabiliriz. Örneğin, paraya bugün sahipsek,

1. İhtiyacımız olan veya sadece bizi mutlu edecek şeyleri satın alabiliriz;
2. Bugünden bir yıl sonra daha pahalı olacak şeyleri satın alabiliriz. (Enflasyon);
3. Bankada mevduat yapıp bir yıl sonra daha fazla tutara sahip olabiliriz;
4. Tutarın bir kısmını harcayıp gerisini bankaya yatırabiliriz;
5. Herhangi bir nedenle bir yıl sonra parayı alamama riskinden kurtuluruz. Ne kadar geç alacaksak risk aslında o kadar büyüktür (Şimdi almak gelecekte almaya söz verilmesinden daha güvenlidir)

Bu parayla ilgili her konuda **zamanın** önemini gösterir. Bu da çoğunlukla **"paranın zaman değeri"** diye bilinir, ve bu parayla ilgili her durumda anahtar konu niteliğindedir.

Farklı tutarlarda paralarla uğraştığımız her zaman (örneğin onları karşılaştırırken veya toplarken) şunu aklımızda bulundurmalıyız : bugünkü €1.000 bir yıl sonraki €1.000'dan farklıdır (veya gelecekteki ya da geçmişteki). Bu tutarlar farklı zamanlarda olduklarından; *direkt* olarak karşılaştırılamaz; toplanamaz ve çıkarılamazlar. Herhangi bir nedenle, onlarla işlem yapmamız gerekirse, onları önce karşılaştırılabilir yapmalıyız, yani, tek bir birimde (zamanda) ifade etmeliyiz. Örneğin, onları direkt olarak toplamaya çalışmak metre ve kilometreyi direkt toplamaya benzeyecektir (farklı birimler). Bu çok büyük bir hata olurdu. Tabi ki, herşeyden önce, her tutarı aynı birimde ifade etmeliyiz (örneğin, metre veya kilometre veya başka bir birim, ama hepsini tek bir birimde).

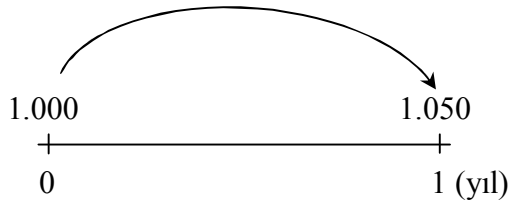
Para tutarları ile uğraşırken (bunlara nakit akımları diyelim) fikir yine aynıdır. Tümünü tek bir birimde ifade etmeliyiz. Ve parayla uğraşırken bu birim nedir? **Zaman**! Bu yüzden her bir nakit akımını **aynı tek an** için ifade etmeliyiz. Sadece tüm nakit akımlarını aynı an için ifade ettikten sonra onları karşılaştırabilir, toplayabilir ve çıkarabiliriz.

> **Finansal Kalkülüs'ün Altın Kuralı**: nakit akımları ile ilgili doğru karşılaştırma ve işlemler için, tüm tutarlar aynı zaman dilimi için ifade edilmiş olmalıdır.

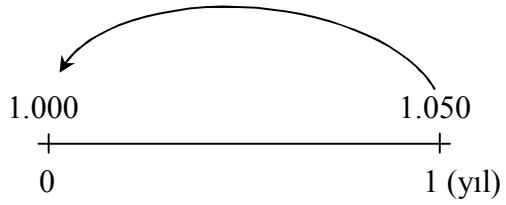
Bunu nasıl yapıyoruz? Bu konuyu daha sonra göreceğiz. Şimdilik, sadece diyebiliriz ki, bir veya daha fazla nakit akımını <u>daha sonraki</u> (meydana geldiğinden veya ifade edildiğinden daha sonraki) ve/veya bir veya daha fazla nakit akımını <u>daha önceki</u> (meydana geldiğinden veya ifade edildiğinden daha önceki) bir an için ifade ediyoruz.
Bunun için kullandığımız teknikler birazdan incelenecek.
Gelecek için ifade edilen bir tutarın daha yüksek olması anlaşılır olmalı (Örneğin bugünün €1.000'su bir yıl sonrasının €1.050'su v.b.).

Aynı şekilde düşünmeye devam edersek, şimdiden öncesi için ifade edilen bir nakit akımının da daha az olması gerekecektir (şimdinin €1.050'su bir yıl öncesinin €1.000'su v.b.).

İlk tipteki gibi durumlar üzerinde düşünmeye devam edersek çoğunlukla daha rahat hissederiz. Bunlar genellikle daha kolay anlaşılıyor. Örneğin, bugün bankaya €1.000 yatırırsak, bir yıl sonra daha fazla paramız olacağını umuyoruz, yaklaşık €1.050 gibi.



Genellikle ikinci tip durumu düşünmek biraz daha zor oluyor. Ama bir de şöyle düşünün : bir zaman evvel bir borç almıştın, bir yıl sonra €1.050 ödemen gerekiyor. Borcunu bugün ödemeye niyetlendin diyelim (anlaşılan ve olması gerekenden zamandan önce). Bugün €1.050 mi ödemen gerekir? Bu sence adil mi? Belki daha erken ödeyerek €1.050'dan daha az ödemen gerektiğini kabul edersin mesela €1.000 doğru mu?



Görüyor musun, işte bu paranın zaman değeri…

1.2 - Anahtar değişkenler: para, zaman, faiz oranı.

Nakit akımları ile ilgilenirken üç anahtar değişken vardır. Aslında bunlardan zaten bahsetmiştik. Bunlar **para**, **zaman** ve **faiz'**dir (veya, görülebileceği gibi, **faiz oranı**).

Yukarıda ilk iki anahtar değişkene zaten değinmiştik : para ve zaman. Dolaylı bir yoldan, üçüncü olandan da bahsetmiştik aslında, faiz oranı. *Bugünün €1.000'su için bir yıl sonrasının €1.050'su denilebilir* derken aslında asıl kastettiğimiz şey paranın zaman değerinin (bu örnekte bir yılın zaman değerinin) €50 olduğuydu. 50/1.000 bize 5% (yıllık) oranı verir. İşte bu faiz oranıdır, çoğunlukla yıllık yüzde biçiminde ifade edilir (tabi bu zorunlu değildir). Böylelikle, faiz oranının (yıllık %) €100'yu bir yıl elde tutmanın ücreti olduğunu söyleyebiliriz. Bu €50 faizdir.

1.3 -Faiz: neden ve nasıl ?

Faiz neden vardır? Birinden belirli bir zaman dilimi için belirli miktar para aldığımızda, bunun geri ödemesinde o kişiye *ekstra birşey* vermek gayet adil gözükmektedir.

Aslında, biz bu parayı (*bizim* paramız da değil) belirli bir süre için kullandık. Bunun bir ücreti olmalı. İşte bu ücrete faiz diyoruz. Nasıl hesaplanabilir? Şu kolaylıkla anlaşılabilir, faiz miktarı *ne kadar* para borç aldığımıza, *ne kadar zaman için* aldığımıza ve onun *fiyatına* göre değişecektir (Örneğin faiz oranı için yıllık 5% diyebiliriz).

O zaman bu örnekte, 1 yıl süre için €5.000 borç aldığımızı düşünürsek ve faiz oranını da %5 olarak alırsak bir yılın sonunda sadece €5.000 değil ayrıca

5.000 x 1 x 0,05 = 250 euro faiz ödememiz gerekecektir.

Hadi bazı semboller seçelim :

. **I** : faiz (Euro, Dolar ve diğer tüm para birimleri için)
. $\mathbf{C_0}$ başlangıçtaki para miktarı (buna 0 anı diyebiliriz),
(Ayrıca *anapara, temel,* ***P*** veya *mevcut değer,* **PV**)
. **n** zaman (yıllar, çeyrekler, aylar, günler veya diğer tüm birimlerle ifade edilebilir)
. **i** faiz oranı (çoğunlukla yıllık % şeklinde ifade edilir)

O zaman ayrıca şöyle diyebiliriz :

$\mathbf{I = C_0 . n . i}$ veya $\mathbf{I = PV . n . i}$

n ve **i**'nin aynı zaman biriminde ifade edilmesi bir zorunluluktur. Örneğin, **n** yıl ise **i** yıllık faiz, veya **n** ay ise **i** aylık faiz olacaktır. Birimler farklı ise tek bir birime dönüştürülmelidir. Hadi birkaç basit örnek üzerinden gidelim :

Örnek 1

C_0 (veya PV) = $1,000; n = 2 yıl; i = 4% (yıllık); I = ?

I = 1,000 x 2 x 0.04 = $80

Örnek 2

C_0 (veya PV) = $1,000; n = 5 ay; i = 4% (yıllık); I = ?

I = 1 000 x 5/12 x 0.04 = $16.67

Örnek 3

C_0 (veya PV) = $1,000; n = 123 gün; i = 4% (yıllık); I = ?

I = 1 000 x 123/365 x 0.04 = $13.48

Bundan sonraki bölümde günler ve tarihler arasında hesaplama yapmak için farklı yöntemler olduğunu göreceğiz.

2. BASİT FAİZ VE BİLEŞİK FAİZ

2.1 - Basit faiz. Basit faiz altında faiz oranları.

Basit faiz ile karakterize edilen aslında herhangi bir dönem oluşmuş olan faiz tutarlarının gelecek dönemlerde faiz üretmemesi veya başka bir deyişle faizin faiz getirmemesidir. Herhangi bir dönemin faizi sadece anapara C_0 (PV) üzerinden hesaplanır, dönemden döneme değişim göstermez.

Örnek 4

C_0 (PV) = $1,000; n = 3 yıl; i = 12% (yıllık)

I_1 = 1,000 x 1 x 0,12 = $120

1 yıl sonra, faiz $120 olacaktır, ancak bu baştaki $1,000'a eklenmeyecektir. İkinci yılda, faizi oluşturan tutar $1,000 olarak kalacaktır (C_0 veya PV). Bu yüzden,

I_2 = 1,000 x 1 x 0,12 = $120

Tekrar, bu $120 eklenmeyecektir. ve,

I_3 = 1,000 x 1 x 0,12 = $120

Üçüncü yılın sonunda, toplam faiz tutarı,

120 + 120 + 120 veya 3 x 120 = $360'a eşit olacaktır.

Toplam tutar da $1,360'a eşit olacaktır (1,000 + 360).

Bu çoğunlukla "Birikmiş Değer", "Son Değer" veya "Gelecek Değer" (C_n veya FV) olarak anılır.

Basit faiz altında,

$C_n = C_0 + I$ (veya FV = PV + I)

ve

$I = C_0\, n\, i$ (veya I = PV n i)

Ve bu şu anlama gelir

$C_n = C_0 + C_0\, n\, i$
$\mathbf{C_n = C_0\,(1+ni)}$

veya

FV = PV + PV n i
FV = PV (1+ni).

Basit faiz altında, yıllık 12% faiz veya 6 ay için 6% faiz veya bir çeyrek için 3% faiz veya aylık 1% faiz aynı anlama gelmektedir: bir yıl sonunda, toplam faiz tutarı aynı olacaktır, yıllık 12%'den, 6 ay için 6%'dan, bir çeyrek için 3%'den, aylık 1%'den hesaplama sonucu değiştirmez. Basit faiz altında, faiz oranları arasındaki ilişki *orantılı bir ilişki* olacaktır: eğer faiz oranı yıllık 12% ise,

. 6% altı aylık süre için (dönemin ½'si, faiz oranının da ½'si)
. 3% bir çeyrek için (dönemin ¼'ü, faiz oranının da ¼'ü)
. 1% bir ay için (dönemin 1/12'si, faiz oranının da 1/12'si)
. ve böylece devam eder.

2.2 - Bileşik faiz. Bileşik faiz altında faiz oranları. Yıllık nominal faiz oranı (NOM) ve yıllık efektif faiz oranı (EFF).

Bileşik faiz ile karakterize edilen aslında bir dönemde oluşmuş faiz tutarlarının da gelecek dönemlerde ayrıca faiz kazanması veya başka bir deyişle faizin faiz getirmesidir. Şuna dikkat edin:

$I_1 = C_0 \text{ x } 1 \text{ x } i = C_0\, i$
$C_1 = C_0 + I_1 = C_0 + C_0 i = C_0\,(1+i)$

$I_2 = C_1 \text{ x } 1 \text{ x } i = C_1\, i$
$C_2 = C_1 + I_2 = C_1 + C_1 i = C_1\,(1+i) = C_0\,(1+i)^2$

$I_3 = C_2 \text{ x } 1 \text{ x } i = C_2\, i$
$C_3 = C_2 + I_3 = C_2 + C_2 i = C_2\,(1+i) = C_0\,(1+i)^3$

Ve böylece devam eder. n. dönemin sonunda şu sonuca varırız :

$\mathbf{C_n = C_0\,(1+i)^n}$ (or $\mathbf{FV = PV\,(1+i)^n}$)

Not: Bundan sonra daha sıklıkla C_0 and C_n yerine PV ve FV kullanacağız

<u>Örnek 5</u>

PV = $1,000; n = 3 yıl; i = 12% (yıllık)

I_1 = 1,000 x 1 x 0.12 = $120

1 yılın sonunda, $120 olan faiz $1,000 olan anaparaya eklenecektir. İkinci yılda faiz getiren tutar $1,120 olacaktır,

I_2 = 1,120 x 1 x 0.12 = $134.40

Tekrarında, bu $134.40 anapara sayılan $1,120'ye yani ikinci yılın başındaki tutara eklenecektir ve toplamda $1,254.40 olacaktır,

I_3 = 1,254.40 x 1 x 0.12 = $150.53

Üçüncü yılın sonunda toplam tutar $1,404.93 olacaktır. Basit faiz hesabında bu tutar örnek 4'de görülebileceği gibi $1,360 olacaktı.

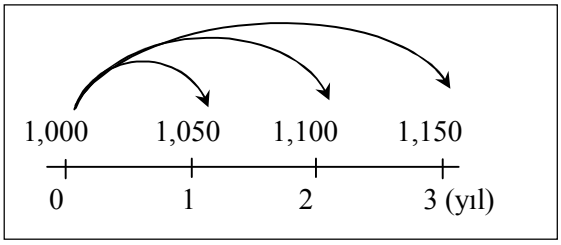
Görülebileceği gibi bileşik faiz altında farklı dönemlerde oluşan faiz sabit değildir, takip eden dönemlerde büyür ve bu büyüme *geometriktir*:

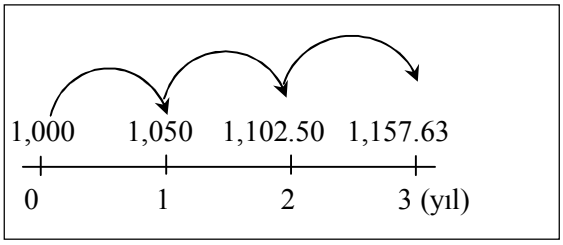
$I_1 = PV\ i$
$I_2 = I_1\ (1+i)$
$I_3 = I_2\ (1+i) = I_1\ (1+i)^2$
$I_4 = I_3\ (1+i) = I_1\ (1+i)^3$, ve böylece devam eder

Şu kolayca anlaşılabilir ki bileşik faiz altında, $\mathbf{FV = PV\ (1+i)^n}$ formülü geçerlidir, daha önce de gördüğümüz gibi.

Tekrarlıyorum, *n* ve *i* ifadelerinin aynı zaman biriminde olması hayati önemdedir (*i* yıllık faiz oranı ise *n* de yıl olmalı; *i* aylık faiz oranı ise, *n* süre de ay olmalıdır.).

Görselleştirmek gerekirse, basit faiz (solda) ve bileşik faiz (sağda) aşağıdaki gibi davranacaktır. Her ikisi de yıllık 5% faiz ve 3 yıllık dönem için. Farkı görüyorsunuz değil mi ?





Peki, ya faiz yılda bir kereden fazla hesaplanırsa? Bu durumda *yıllık 12%* ile esas kastedilen şeyi bilmeliyiz. Aslında şimdi faizi faizlendireceğiz, buna göre,

1) Yıllık 12% derken faizi aylık 1%'den çeyreklik 3%'den altı ay için 6%'dan mı hesaplayacağız? Öyleyse yılın sonunda <u>12%'den fazlasını</u> elde edeceğimizi anlamalıyız. Çünkü faiz, faiz getiriyor.

veya

2) Yıllık 12% derken faiz yılda kaç kere hesaplanırsa hesaplansın yıl sonunda 12% kazanacağımız mı kastediliyor? Eğer böyleyse (örneğin) aylık faizin 1% olduğunu söyleyemeyeceğiz. <u>1%'den daha az</u> olmak zorunda. Çünkü 1% olsaydı yılın sonunda faizin faiz getirmiş olmasından kaynaklı 12%'den fazla olması gerekirdi.

İlk durumda, 12% için *yıllık nominal faiz oranı* (NOM) diyeceğiz. Eğer bir yıl içinde iki veya daha fazla hesaplama varsa bir yıl için "efektif/reel" faiz oranı 12%'den fazla olacaktır. Yıl içinde yapılan hesaplama sayısı arttıkça bu oranda yükselecektir.

İkinci durumda ise, 12% faiz oranını <u>yıllık efektif faiz oranı</u> (EFF) olarak adlandıracağız (Yılın sonunda 12% elde ettiğimizden, yıl içinde kaç kere hesaplandığı önemli değil). O zaman şöyle diyebiliriz:

- **EFF** bileşik etkiyi yansıtan yıllık orandır, yıl içinde kaç kere faiz hesaplanmış olduğu önemli değidir;

- **NOM** faizin faiz getirmediği durumda yıllık orandır (örneğin basit faizin kullanıldığı gibi).

Hadi bundan sonrası için bazı sembolleri kabul edelim:

i: yıllık efektif faiz oranı (EFF)
$\mathbf{i_{(k)}}$: yıllık nominal faiz oranı, yılda k kez hesaplanıyorsa (NOM)
$\mathbf{i_k}$: yılın 1/k'lık dönemi için efektif faiz oranı

O zaman,

i = 12% şu anlama gelir, mevcut yılda kaç kez hesaplanırsa hesaplansın, yılın sonunda oran %12'ye karşılık gelecektir.

$\mathbf{i_{(12)}}$ **= 12%** şu anlama gelir, faiz, faiz getirmezse bir yıl sonra oran 12% olur. Ancak, yılda 12 defa faizlendirme olursa (k=12) örneğin her ay. Bu her ay için 1% faiz anlamındadır. Bu yüzden yılın sonundaki efektif faiz oranı 12%'den yüksek olacaktır çünkü 12 defa faizlendirme yapılmıştır.

$\mathbf{i_{12}}$ **= 1%** aylık faiz oranının 1% olduğunu söyler. Her ay faizlendirme olur. Bu yüzden yılın sonunda efektif faiz oranı 12%'den yüksek olacaktır.

Şunu iyice anlamalıyız ki, bileşik faiz bahsinde elimizde nominal faiz oranı varken faizlendirme/hesaplama sıklığı (örneğin yılda kaç defa yapıldığı) kritik önemdedir. Çünkü bu yıllık efektif faiz oranı için belirleyici unsurdur.

<u>Örnek 6</u>

Yıllık nominal faiz oranı: 12% her 6 ayda bir faizlendiriliyor.

i) 6 aylık süre için efektif faiz oranı?
ii) 1 aylık süre için efektif faiz oranı?
iii) 3 aylık süre (1 çeyrek) için efektif faiz oranı?
iv) Yıllık efektif faiz oranı?

$i_{(2)}$ = 12% olarak alıyoruz. Burada <u>hayati önemdeki</u> bilgi, **faizlendirme 6 ayda bir** defa oluyor.

Neden hayati önemde? Çünkü

a) Bu bileşik faiz hesabı
b) 12% yıllık nominal oran

Aslında,

a) Bu basit faiz olsaydı, faizlendirme sıklığı önemli olmayacaktı çünkü faiz, faiz getirmeyecekti.

b) Eğer faiz oranı yıllık efektif olsaydı, hesaplama sayısının bir önemi olmayacaktı. Ancak faiz oranı nominal olduğunda, hesaplama sıklığındaki herhangi bir değişim hayati önemde olacaktır.

O zaman böyle bir durumda (bileşik faiz ve nominal faiz oranı) en önemli faiz oranı, faizlendirme sıklığındaki faiz oranı olacaktır (6 ay ise 6 aylık faiz oranı) ve hesaplanırken *orantılı ilişki* kurulacaktır. Diğer tüm periyotlardaki faiz oranları bundan yola çıkarak hesaplanmalıdır.

Örneğimize geri dönelim: öncelikle, 6 ay için faiz oranı i_2 'yi hesaplayalım. Nasıl? Orantılı ilişkiyi kullanarak. Neden? Çünkü 12% nominal oran. Yani faiz, faiz getirmezse, bir yıl sonrası için faiz oranı 12% olacaktır, örneğin, 6 ay için faiz oranı 6% çünkü : $i_2 = 0,12 / 2 = 0,06$. Bu 6 aylık dönem için efektif faiz oranı (soru i)).

Şimdi, başka bir periyotta faiz oranını hesap edebilmek için şunu aklımızda bulundurmalıyız : öyle hesaplanmalı ki 6 ay için faiz oranı 6% olsun. Yani bu, aylık faiz oranının %1 olamayacağı anlamına gelir, çünkü her ay faizlendirilen %1, 6 ayda 6%'yı geçer. Bu yüzden aylık faiz 1%'den az olmalı. Peki tam olarak kaç ? Bunun i_{12} olması gerekecektir, yani,

$$\underbrace{(1+0,06)^1}_{|6\text{ aylık dönem}|} = \underbrace{(1+ i_{12})^6}_{|6\text{ ay}|} \quad \textit{Faiz oranları arasındaki denklik ilişkisi}$$

Haydi şöyle diyelim: öyle bir aylık faiz oranı arıyoruz ki (i_{12}), 6% faiz oranından 6 aylık dönemde tek bir faizlendirme veya 6 kez i_{12} oranından faizlendirme aynı sonucu versin.

Dikkat edin (1+0,06)'nın kuvveti konumundaki "1"in anlamı "1 sömestr" (çünkü 6%, 6 aylık dönem için olan faiz oranı); $(1+ i_{12})$'nın kuvveti konumundaki "6" ise "6 ay" anlamında (çünkü i_{12} aylık faiz oranı). Eşitliğin iki tarafındaki zaman periyodunun aynı olması lazım (bu örnekte, 1 sömestr = 6 ay).

O zaman haydi soruları cevaplayalım:

i) $i_2 = 0,12/2 = 0,06$

ii) $(1+0,06)^1 = (1+ i_{12})^6 \Leftrightarrow i_{12} = 0,009759$ (ilk eşitlemede: 1 sömestr = 6 ay)

iii) $(1+0,06)^1 = (1+ i_4)^2 \Leftrightarrow i_4 = 0,02956$ (ilk eşitlemede: 1 sömestr = 2 çeyrek)

iv) $(1+0,06)^2 = (1+ i)^1 \Leftrightarrow i = 0,1236$ (ilk eşitlemede: 2 sömestr = 1 yıl)

2.3 - Gün Sayma Kuralları (İki tarih arasındaki gün sayısını hesaplama)

İki gün arası faiz hesabı yaparken, birden çok tipte gün sayma şekli vardır. Bunlardan bazıları şunlardır:

- ACT/365 (365 günlük yıl temelinde gerçek gün sayısı)
- ACT/360 (360 günlük yıl temelinde gerçek gün sayısı)
- 30/360 (360 günlük yıl ve 30 günlük ay temelinde)

. "ACT" günlerin gerçek bir takvim esasında sayıldığı belirtir. İki gün arasındaki gerçek gün sayısıdır (ACTual=gerçek) Başlangıç ve bitiş gününü, artık ve normal yıl hesabını dikkate alır;
. "30" her bir ayın eşit ve 30 günden oluştuğunu varsayar;
. "365" yılın gün sayısının 365 gün olduğunu varsayar;
. "360" yılın gün sayısının 360 gün olduğunu varsayar.

Bununla dışında, çoğunlukla periyodun ilk ve son günleri sayılmazlar.

Örnek 7

€1.000 tutarındaki bir mevduat 20 Ocak 2016'dan 14 Eylül 2016'ya kadar i = 8% orandan faizlendiriliyor. Basit faiz ve aşağıdaki durumlarda ne kadar faiz işler ?

a) ACT/365
b) ACT/360
c) 30/360

(2016'nın bir artık yıl olduğunu da dikkate alın)

Günlerin sayılması:

	ACT	30
Ocak	11	10
Şubat	29	30
Mart	31	30
Nisan	30	30
Mayıs	31	30
Haz.	30	30
Tem.	31	30
Ağus.	31	30
Eylül	14	14
Top:	**238**	**234**

O zaman,

a) ACT/365
I = 1.000 x 238/365 x 0,08 = €52,16

b) ACT/360
I = 1.000 x 238/360 x 0,08 = €52,89

c) 30/360
I = 1,000 x 234/360 x 0,08 = €52,00

EK BİLGİ: FAİZDEN ALINAN VERGİ

Portekiz'de faizden bir gelir vergisi alınıyor. Bu oran uzun zaman 20% idi fakat 2010'da hükümet bunu 21,5%'a, sonra 25%'e, 26,5%'a ve en son 28%'e yükseltti. Bu vergi banka tarafından tahsil ediliyor ve sonra mudi namına hazineye ödeniyor.

Bu yüzden faiz oranının "vergi öncesi" veya "vergi sonrası" (veya *net*) olmasını tam olarak tanımlamak önemlidir. Bunun dışında şunu da unutmamalıyız, her faiz işlediğinde, vergi banka tarafından tahsil edilecek, mudiye ödenmeyecek. Yani, bileşik faiz kullanılıyorken, sonraki döneme eklenecek olan sadece net faiz tutarı olacaktır. (vergi öncesi oranın 72%'si).

<u>Örnek 8</u>

1 yıl süre için €1.000 mevduat yapmak istiyorsunuz. Hangi bankayı seçmelisiniz ?

- Banka A: Yıllık nominal vergi öncesi oran: 3,765%; aylık faiz işliyor
- Banka B: Yıllık efektif net oran: 2,9%; aylık faiz işliyor

(Faizden alınan vergi oranı: 28%).

<u>Banka A</u>: dikkat etmemiz gereken nokta verilen oran, vergi öncesi orandır ve banka bunu her ay faizlendirmektedir. Yani yapmamız gereken,

1. Bir ay için faiz oranını hesaplayın (orantılı, çünkü belirtilen nominal oran) Faiz oranı hala vergi öncesi oran,
2. Net faiz oranını hesaplayın (ay için)

Böylece,

1. Bir aylık faiz oranı (hala vergi öncesi)
   $i_{12\ vergi}$ öncesi = 0,03765/12 = 0,003138

2. Net aylık faiz oranı
   $i_{12\ net}$ = 0,72 x 0,003138 = 0,002259

Yani, Banka A'yı seçersek, bir yıl sonra sahip olacağımız

$$FV = 1.000\ (1+0{,}002259)^{12} = €1.027{,}452 \approx €1.027{,}45$$

<u>Banka B</u>: bu faiz oranı zaten efektif ve net oran. Net (vergi sonrası) olduğu için vergiyi düşünmemize gerek yok. Efektif oldğu için faizin faiz getirmesi durumunu düşünmeye gerek yok. O zaman direkt olarak FV'i hesaplayabiliriz :

$$FV = 1.000\ (1+0{,}029)^{1} = €1.029$$

Sonuç olarak: Banka B'nin biraz daha iyi olduğu söylenecektir.

Alıştırmalar

Basit Faiz

2.1 - Aleksandra $3,000 tutarında basit faizle ve yıllık 5% faiz oranı koşulları altında mevduat yapıyor. 2 yıl sonra ne kadar faiz alacaktır ?

(I =$300)

2.2 - Brigita yıllık 6% faiz oranından basit faizle $1,000 tutarında mevduat yapıyor. 4 ay sonra alacağı faiz ne kadar olacaktır ?

(I=$20)

2.3 - Mert, basit faiz ve 4% faiz oranı ile $5,000'lık bir mevduat hesabı açıyor. 150 gün sonra aşağıdaki şartlarda ne kadar faiz kazanır ?

i) Sivil yıl (365 gün)
ii) Ticari yıl (360 gün)

(i: I=$82.19; ii: I=$83.33)

2.4 - Laura, €10.000 tutarında, yıllık %5 basit faizle, 20 Kasım 2014 ve 20 Mart 2015 arasında mevduat yapmıştır. Aşağıdaki varsayımlarda ne kadar faiz kazanmış olur ?

i) ACT/365
ii) ACT/360
iii) 30/360

(i: I=€164,38; ii: I=€166,67; I=€166,67)

Bileşik Faiz

2.5 - Sarah 12% yıllık nominal faiz oranından (bileşik faizle) €7.500 tutarında mevduat yapmıştır. Aşağıdaki varsayımlarda 1 yıl sonra gelecek değer (FV) ne olur ?

i) Aylık faizlendirme
ii) Çeyreklik faizlendirme
iii) Yıllık faizlendirme

(i: FV=€8.451,19; ii: FV=€8.441,32; iii: FV=€8.400)

2.6 - Rebecca $7,000 tutarında bileşik faizli bir mevduat yapıyor. 8 çeyrek sonra, gelecek değer (FV) $7,715.20 oluyor. Buna göre aşağıdaki faiz oranları ?

i) Yıllık nominal faiz oranı
ii) Yıllık efektif faiz oranı

(i: $i_{(4)}$=4.8938%; ii) i=4.9843%)

2.7 - Magda $40,000 tutarında yıllık 5% efektif faizli bir mevduat yapıyor (Bileşik faiz). Daha sonra gelecek değer (FV) $48,620.25 oluyor. Mevduatı ne kadar süre bankada tutmuştur ?

(n=4 yıl)

Faiz Oranları

2.8 – Yıllık efektif faiz oranı: 10%. Aşağıdaki vadeler için efektif faiz oranı ne olur ?

i) Sömestr (6 ay)
ii) Çeyrek
ii) Ay

(i: i_2=4,8809%; ii: i_4=2,4114%; iii: i_{12}=0,7974%)

2.9 - Yıllık nominal faiz oranı: 10%; aylık faiz işliyor. Yıllık efektif faiz oranı ?

(i=10,4713%)

2.10 – Bir çeyrek (3 ay) için efektif faiz oranı: 3%

i) Yıllık nominal faiz oranı ?

ii) Yıllık efektif faiz oranı ?

(i: $i_{(4)}$=12%; i=12,5509%)

2.11 - Yıllık nominal faiz oranı: 9%; her çeyrek faiz işliyor, buna göre :

i) Aylık efektif faiz oranı ?

ii) 1 sömestr için efektif faiz oranı ?

iii) 1 çeyrek için efektif faiz oranı ?

iv) Yıllık efektif faiz oranı ?

(i: i_{12}=0,7444%; i_2=4,5506%; i_4=2,25%; i=9,3083%)

2.12 - Yıllık efektif faiz oranı: 9%; her çeyrek faiz işliyor, buna göre :

i) Aylık efektif faiz oranı ?

ii) 1 sömestr için efektif faiz oranı ?

iii) 1 çeyrek için efektif faiz oranı ?

iv) Yıllık efektif faiz oranı ?

(i: i_{12}=0,7207%; i_2=4,4031%; i_4=2,1778%; i=9%)

2.13 – 1 yıllık süre için €10.000 yatırım yapacaksınız. Hangi bankayı seçerdiniz? (Vergi oranını 25% olarak alın).

- Banka A: Yıllık nominal net oran : 4,6%; çeyreklik faiz işliyor
- Banka B: Yıllık nominal vergi öncesi oran : 6%; aylık faiz işliyor
- Banka C: Yıllık efektif net oran : 4,5%; aylık faiz işliyor
- Banka D: Yıllık efektif vergi öncesi oran : 6,1%; aylık faiz işliyor

(Banka A: €10.468; Banka B: €10.459,40; Banka C: €10.450; Banka D: €10.454,38)*

2.14 – Faiz oranı: 6% yıllık nominal, 6 ayda bir faiz işliyor. Aşağıdaki faiz oranlarını hesaplayınız :

i) Aylık efektif oran

ii) Yıllık efektif oran

(i: i_{12} = 0,4939%; ii: i = 6,09%)

2.15 – Faiz oranı: 3%, efektif, çeyreklik. Aşağıdaki faiz oranlarını hesaplayınız :

i) 6 aylık efektif oran

ii) Aylık efektif oran

iii) Yıllık nominal, çeyreklik faiz işliyor

iv) Yıllık efektif oran

(i: i_2 = 6,09%; ii: i_{12} = ,9902%; iii: $i_{(4)}$ = 12%; iv: i = 12,5509%)

2.16 – Faiz oranı: 7% yıllık efektif. Aşağıdaki faiz oranlarını hesaplayınız :

i) Yıllık nominal, her çeyrek faiz işliyor

ii) Yıllık nominal, her ay faiz işliyor

iii) Yıllık nominal, her yıl faiz işliyor

(i: $i_{(4)}$ = 6,8234%; ii: $i_{(12)}$ = 6,785%; iii: i = 7%)

2.17 – Faiz oranı: 12% yıllık nominal, vergi öncesi, her ay faiz işliyor. Yıllık efektif net (vergi sonrası) faiz oranını hesaplayınız. (Vergi oranı: 28%)

(i_{net} = 8,9905%)

2.18 - Faiz oranı: 12% yıllık efektif, vergi öncesi. Faiz her ay işliyor. Yıllık net (vergi sonrası) efektif faiz oranını hesaplayın. (Vergi oranı: 28%)

(i_{net} = 8,5135%)

3. NAKİT AKIMLARI ARASINDA DENKLİK

3.1 - Denklik: basit faiz ve bileşik faiz varsayımı altında faizlendirme ve iskontolama. basit faiz varsayımı altında iskontolamanın zayıflıkları ve bileşik faiz varsayımında iskontolamanın güçlü yanları.

Finansal Kalkülüs'ün Altın Kuralı'na göre (sayfa 5), nakit akımlarıyla doğru bir biçimde işlem yapmak ve karşılaştırmak için onları tek bir zamanda ifade etmeliyiz. Biz zaten herhangi bir tutarı Bugünkü Değer (PV) ve Gelecek Değer (FV) olarak ifade etmeyi öğrenmiştik. Görüleceği üzere, basit faiz varsayımında, FV = PV (1+ni); bileşik faiz varsayımında ise, FV = PV $(1+i)^n$ şeklinde ifade ediyoruz. Fakat belli bir tutarı daha sonraki bir zaman yerine daha erken bir zaman için ifade etmemizi gerektiren çok durum vardır. Bunu neden yapmalıyız ve nasıl yapabiliriz?

Bunun nedenlerinden biri örneğin vadesi gelmemiş bir borcun şimdi (veya vadesinden önce herhangi bir zaman) ödenmesi olabilir. Peki bunu nasıl yaparız ? Herşeyden önce, vadesinden erken ödenecek bir borcun mevcut ödenecek tutarının daha az olması gerektiği anlaşılabilir. Gerçekten de, ödenecek faizin daha az olması adildir. Şimdi soru şudur: yeni ödeme tutarı nasıl hesaplanacak? Bunu yapmak için en az iki yöntem düşünebiliriz: basit faiz altında veya bileşik faiz altında[1].

Bir nakit akımını daha önceki bir an için ifade etmeye çoğunlukla "iskontolama" diyoruz. (Sonraki bir an için olana "faizlendirme" demiştik).

Farklı zamanlar için ifade edilmiş iki veya daha fazla nakit akımı arasında *faizlendirme* veya *iskontolama* kullanılarak **denklik** sağlanabilir. Bunu paranın zaman değerinden dolayı yapmamız gerektiğini unutmayın (her bir nakit akımı aynı tek zaman için ifade edilmelidir).

Örnek 9

Bugünden 2 yıl sonra ödenmesi gereken €1.000 tutarındaki (faizi içeren) bir borç, yıllık efektif 6% faiz oranı ile, bugün ödenirse ne kadar olmalıdır,

a) Basit faiz kullanılırsa ?
b) Bileşik faiz kullanılırsa ?

Haydi beraber inceleyelim:

a) Basit faiz oranı ile faizi çoğunlukla şu şekilde hesaplıyoruz:
I = FV.n. i ; ve PV = FV – I, sonra PV = FV – FV.n.i ⇔ **PV = FV (1-ni)** [2]

Bu durum için,
I = 1.000 x 2 x 0,06 = €120. Borçlunun ödemesi gereken PV = 1.000 – 120, veya PV = 1.000 (1 - 2 x 0,06)⇔ PV = €880.

Ancak dikkat etmeliyiz ki bu yaklaşım ciddi bir hata barındırıyor. Faiz aslında €1.000 üzerinden hesaplanmamalı. Aslında buradaki €1.000 başka bir tutarın, 2 yıl için ve %6 faiz oranından faizini içeriyor, ve bu büyük bir fark. Buna rağmen, bu yaklaşım gerçek hayatta[3] sıklıkla kullanılmaktadır.

---

[1] Aslında, basit faiz ile bu hesabı yapmak için iki yol ve bileşik faizle bu hesabı yapmak için de iki yol daha var ancak biz her bir yaklaşımdan bir tanesini inceleyeceğiz.

[2] Buna *Basit İskontolama* deniliyor. Daha iyi olanı ise *Gerçek İskontolama olarak isimlendiriliyor*, yani I = PV.n.i. Bu yaklaşım çok daha doğru. Bu yolla, PV = FV - I ⇔ PV = FV – PV.n.i ⇔ PV = FV / (1+n.i) sonucuna ulaşıyoruz.

[3] En azından Portekiz'de. Bunun günlük yaşamdan örneği *letra de câmbio* adını verdiğimiz enstrüman, ve benzer diğerleri (Almanya'da *wechsel*, Polonya'da *weksel*, Litvanya'da *vekselis*, Yunanistan'da *epitagi* ve Türkiye'de *kambiyo senetleri* adlı enstrümanlar).

Şimdi şöyle düşünün, alacaklı bugün bankaya €880 para yatırıyor, yine basit faizle, aynı faiz oranıyla ve aynı dönem için. Kolaylıkla görebiliriz ki, bu kişi iki yıl sonra aynı tutara ulaşamayacaktır, aslında,
880 (1 + 2 x 0,06) = €985,60 (< €1.000).

b) Bileşik faiz yaklaşımında bunu kolaylıkla hesaplayabiliriz : $\mathbf{PV = FV\ (1+i)^{-n}}$

Bu durumda, $PV = 1.000\ (1+0,06)^{-2} = €890$

Bu yaklaşım (bileşik faiz) çok daha doğru. Aslında dikkat ederseniz, alacaklı kişi parasını bileşik faizle bankaya yatırsa, bu kişi 1 yıl sonra tam olarak €1.000 paraya ulaşacaktır, tamamen matematiksel olduğunu görüyorsunuz :

$890\ (1+0,06)^{2} = €1.000$

Önceki örnekte basit faiz ile iskontolamanın ne kadar zayıf ve bileşik faiz ile iskontolamanın ne kadar güçlü olduğunu görüyorsunuz.

Aslında, basit faiz ile iskontolama yapılırken kullanılan hesap yöntemi nedeniyle Bugünkü Değer'in (PV) -teoride- sıfır olma durumu vardır, ki bu tamamen anlamsızdır. Eğer n.i=1 olursa bu durum oluşacaktır. Daha kötüsü de, teoride PV<0 durumudur ve bu n.i>1 koşulunda ortaya çıkacaktır. Bu bileşik faiz hesabında asla olmaz.

Bu yüzden, basit faiz ile yapılan "basit iskontolama" yalnızca kısa süreli ve düşük faiz oranlı işlemlerde kullanılabilir. Bileşik faiz ile yapılan iskontolama ise aksine bu değişkenlerden ötürü anlamsız sonuç vermez. Kısa veya uzun dönem ile düşük veya yüksek faiz oranına rağmen her zaman mükemmel sonuca ulaştırır. Bu örneğe bakın :

<u>Örnek 10</u>

Bugünden 5 yıl sonra ödenecek $1,000 tutarlı ve 20% faizli bir borç vardır. Bugün ödeme durumunda borçlu aşağıdaki koşullarda ne kadar ödemelidir,

a) Basit faiz kullanılırsa ?
b) Bileşik faiz kullanılırsa ?

Bir bakalım :

a) <u>Basit faiz</u>: PV = FV (1 - ni) = 1.000 (1 - 5 x 0.20) = $0
Bu tamamen anlamsız. Aynı şöyle demek gibi ''Sana borcum olan $1,000'ı 5 yıl sonra değil bugün ödemek istiyorum. Faiz oranı %20 ve basit faiz var. Hadi eşit olması için ne kadar vereceğimi hesaplayalım. O da ne ! Borcum sıfır çıktı! Tamam o zaman bu borç ödendi sana güle güle"

b) <u>Bileşik faiz</u>: $PV = FV\ (1 + i)^{-n} = 1,000\ (1 + 0.20)^{-5} = \$401.88$
Bakın bu ne kadar anlamlı. Alacaklı, alacağını bugün alıp $401.88 parasını 5 yılığına %20 faizle bankaya yatırsa $1,000 parası olacak. İsterseniz kontrol edin: $401.88\ (1 + 0,20)^{5} = \$1,000$. Mükemmel !

Şimdi de, n=5 yıl yerine n=6 yıl (daha uzun dönem) alın ve faiz oranını da %20 yerine %25 (daha yüksek faiz oranı) olarak alın. Ne olduğunu gördünüz mü ?

Önceki örnekler gösteriyor ki, bileşik faiz ile iskontolama mükemmel iken basit faiz ile iskontolama iyi bir eşitleme çözümü değil. Aslında basit faiz Örnek 10'da da gördüğümüz gibi hep kötü, ancak bazı durumlarda (uzun dönemli ve yüksek faiz oranlı) tamamen kabul edilemez oluyor. Gerçekten zayıf bir metod. Sadece kısa dönemli ve düşük faiz oranlı işlemlerde kabul edilebilir sonuçlar veriyor. Öte yandan bileşik faiz gerçekten iyi bir denkleştirme metodu: kısa-uzun dönem ve/veya düşük-yüksek faiz oranından bağımsız olarak mükemmel sonuçları veriyor.

3.2 - Denklik faktörleri.

Daha önce de gördüğümüz gibi, parayla uğraşırken herhangi bir nedenle farklı anlarda ifade edilmiş nakit akımlarını karşılaştırırken veya onlarla işlem yaparken yapmamız gereken ilk şey bu nakit akımlarını aynı tek an için ifade etmektir (buna *odak tarihi* denilmekte).

Bu, bir veya daha fazla nakit akımının faizlendirilmesini, öteki veya ötekilerin iskontolanmasını gerektirebilir. Bir veya daha fazlası için hesaplama gerekmeyedebilir. Bu, nakit akımlarının zaten aynı an için ifade edilmiş olduğu durumdur.

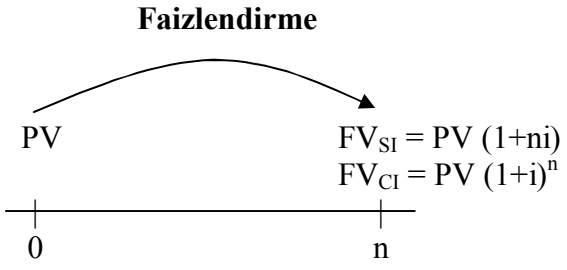
Faizlendirme veya iskontolama, basit veya bileşik faiz kullanılarak kolaylıkla yapılabilir. Bileşik faiz çok daha güçlü ve doğru sonuçlar vermektedir, bu yüzden de gerçek hayatta daha sık kullanılmaktadır.

Şimdiye kadar sadece bir tek nakit akımını belirli bir zaman için faizlendirmeyi/iskontolamayı gördük. Sonraki bölümde bir ''nakit akımları seti''ne bunu nasıl uygulayacağımızı göreceğiz. Eğer nakit akımı seti iki koşulu taşıyorsa onların Bugünkü Değer'lerini ve Gelecek Değer'lerini (kaç tane olduğuna bakılmaksızın) kolaylıkla hesaplayacağız.

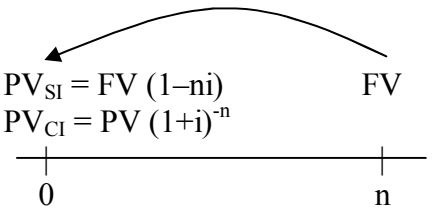
Öncelikle, tek bir nakit akımını nasıl faizlendirdiğimizi ve iskontoladığımızı özetleyelim. Görüleceği üzere,

	Gelecek Değer	Bugünkü Değer
Basit Faiz (SI)	$FV_{SI} = PV\ (1+ni)$	$PV_{SI} = FV\ (1–ni)$
Bileşik Faiz (CI)	$FV_{CI} = PV\ (1+i)^{n}$	$PV_{CI} = FV\ (1+i)^{-n}$

Bunu görselleştirmemiz gerekirse,



İskontolama



Dikkat edin, FV'yi hesaplamak için sadece PV'yi **(1+ni)** veya **$(1+i)^n$** ile çarpıyor; PV'yi hesaplamak için ise, FV'yi **(1–ni)** veya **$(1+i)^{-n}$** ile çarpıyoruz. Bunlara *denklik faktörleri* diyebiliriz. Aslında, yapmamız gereken sadece sırasıyla PV'yi veya FV'yi doğru *faktör* ile çarpmak ve sonraki zamanda (FV) veya önceki bir zamanda (PV) ona *denk* olan nakit akımını bulmak.

Şu gözden kaçmamalı, bu *tek bir nakit akımı*na uygulanan faktörlerdir. Birden çok nakit akımımız varsa, her bir nakit akımı için doğru faktörü *tek tek* uygulamalıyız.

Özet olarak, bu *denklik faktörlerine*[4] sahibiz :

	Faizlendirme Faktörü (CF)	İskontolama Faktörü (DF)
Basit Faiz (SI)	$CF_{SI} = (1+ni)$	$DF_{SI} = (1–ni)$
Bileşik Faiz (CI)	$CF_{CI} = (1+i)^{n}$	$DF_{CI} = (1+i)^{-n}$

Farklı nakit akımları arasında zaman denkliği sağlamak için aşağıdaki üç adımı izlememiz gerekiyor:

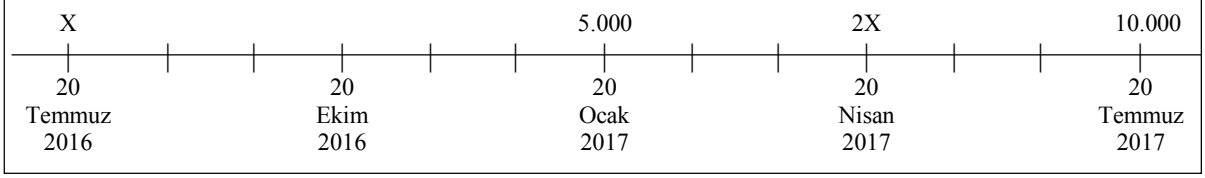
1. Bir tarafta hangi nakit akım(lar)ının, öbür tarafta hangi nakit akım(lar)ının arasında denklik kurulmak isteniyor *(soru: **ne?**)*.
2. Denkliğin kurulacağı anı tanımla, yani her bir nakit akımı için hangi zaman eşitlenilecek "odak anı" olacak *(soru: **ne zaman?**)*.
3. Denkliğin nasıl kurulacağını tanımla, basit faiz varsayımıyla mı bileşik faiz varsayımıyla mı *(soru: **nasıl?**)*.

<u>Örnek 11</u>

John'un 20 Ocak 2017'de €5.000 tutarında ve ayrıca 20 Temmuz 2017'de €10.000 tutarında iki ödemesi vardır. Bu tutarlar 10% yıllık nominal ve çeyreklik işleyen faizi içermektedir. John borçlarının ödeme tarihlerini şu şekilde güncellemek istiyor : €X tutarı 20 Temmuz 2016'da ve €2X tutarı 20 Nisan 2017'de. Aynı faiz oranı, günler arası 30/360 varsayımı ve şu koşullarda ne kadar ödemesi gerekir,

a) Basit faiz varsayımında
b) Bileşik faiz varsayımında

Bu durumu diyagram üzerinde göstererek başlayalım :



[4] Aslında başka denklik faktörleri de mevcut fakat çok fazla kullanılmıyorlar, en azından Portekiz'de durum böyle.

Öncelikle 20 Ocak 2017'de €5.000 tutarındaki ve 20 Temmuz 2017'de €10.000 tutarındaki iki ödemeyi 20 Temmuz 2016'da €X tutarında ve 20 Nisan 2017'de €2X tutarındaki ödemelerle değiştirmek istiyoruz. Başka bir deyişle, [5.000 + 10.000] ile [X + 2X] arasında bir *denklik kurmak* istiyoruz.

Bunu nasıl yaparız ? Cevaplayacağımız üç soru var : *ne*, *ne zaman*, *nasıl*.

1) Ne ?

[5.000+10.000]'nin yerine [X+2X] koymayı, başka bir deyimle [5.000+10.000] ve [X+2X] arasında denklik kurmak istiyoruz.

O zaman denkliği şu şekilde yazarak başlayabiliriz, ancak henüz bitmedi :

$$\underbrace{5.000}_{20\text{ Ocak }2017} + \underbrace{10.000}_{20\text{Temmuz }2017} = \underbrace{X}_{20\text{ Temmuz }2016} + \underbrace{2X}_{20\text{ Nisan }2017}$$

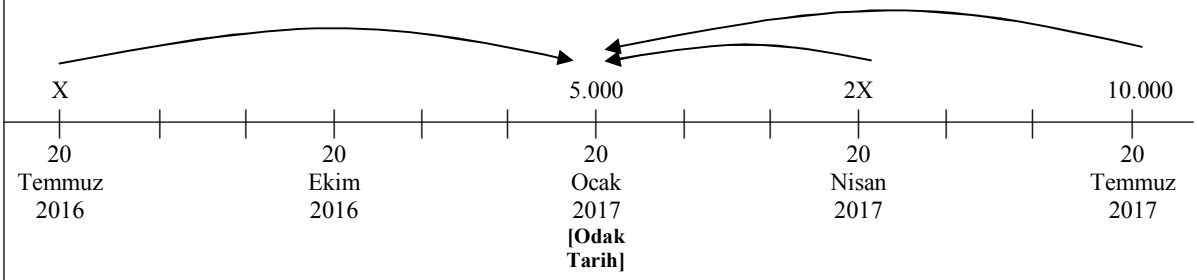
Neden denkleştirme bitmedi ? Çünkü nakit akımları aynı tek zaman için ifade edilmiş değil. O zaman bu anı (*odak anını*) ifade etmeliyiz. Şimdi ikinci soru geliyor : **ne zaman ?**

2) Ne zaman ?

Odak anını ifade etmemiz gerekiyor, yani tüm nakit akımlarının ifade edileceği tek bir tarih. Haydi buna 20 Ocak 2017[5] diyelim. Şimdi ihtiyacımız olan şeyler :

- X'i iki çeyrek boyunca faizlendirmek (veya 6 ay)
- 5.000 ile işlem yapmamak
- 2X'i bir çeyrek için iskontolamak (veya 3 ay)
- 10.000'i iki çeyrek için iskontolamak (veya 6 ay)

Bunlar diyagramda gösterilmek istenirse,



Odak tarihini belirledikten sonra, nakit akımlarını bu tarihe ''getirmeliyiz''. Bunu yapmak için iki yoldan birini seçebiliriz. O zaman şimdi üçüncü soru geliyor.

3) Nasıl ?

Sorunun a şıkkı basit faizle, b şıkkı bileşik faizle işlem yapmamızı istiyor. O zaman doğru faktörleri kullanarak denkleştirmeyi bitirebiliriz :

[5] Önemli olan başka bir konu odak tarihin bileşik faizde önemsiz, basit faizde ise hayati önemde olmasıdır. Diğer bir deyişle, odak tarihi bileşik faiz hesabını etkilemezken -ki bu müthiş- basit faizde her bir odak tarihi değişikliği denkliği değiştirecektir -ki bu çok kötü-. Bu basit faizin bir diğer zayıf yanı olup aynı zamanda bileşik faizin de diğer bir güçlü yanıdır.

a) Basit faiz varsayımında:

$$\underbrace{5.000}_{20\ Ocak\ 2017} + \underbrace{\underbrace{10.000}_{20\ Temmuz\ 2017}\left(1-\frac{6}{12}x0,10\right)}_{20\ Ocak\ 2017} = \underbrace{\underbrace{X}_{20\ Temmuz\ 2016}\left(1+\frac{6}{12}x0,10\right)}_{20\ Ocak\ 2017} + \underbrace{\underbrace{2X}_{20\ Nisan\ 2017}\left(1-\frac{3}{12}x0,10\right)}_{20\ Ocak\ 2017}$$

$$5.000 + 9.500 = 1,05X + 1,95X$$

$$14.500 = 3X$$

$$X = 4.833,33$$

[30/360 varsayımı kullanıldığında, her ayın 30 gün olduğunu varsayarız. Diğer bir deyişle, her tarih ayın 20'si olduğundan ayları kullanabiliriz].

Basit faizi kullanırsak, X = €4.833,33 (20 Temmuz 2016'da ödenecek) ve 2X = €9.666,67 (20 Nisan 2017'de ödenecek).

b) Bileşik faiz varsayımında:

Faiz oranının 10% olduğunu aklımızda tutmamız çok önemli, bu yıllık nominal ve çeyreklik hesaplanıyor. Bu yüzden 1 çeyrek için faiz oranını hesaplamalıyız. Bu da i_4 = 0,10/4 = 0,025 ve devam edersek,

$$\underbrace{5.000}_{20\ Ocak\ 2017} + \underbrace{\underbrace{10.000}_{20\ Temmuz\ 2017}(1+0,025)^{-2}}_{20\ Ocak\ 2017} = \underbrace{\underbrace{X}_{20\ Temmuz\ 2016}(1+0,025)^{2}}_{20\ Ocak\ 2017} + \underbrace{\underbrace{2X}_{20\ Nisan\ 2017}(1+0,025)^{-1}}_{20\ Ocak\ 2017}$$

$$5.000 + 9.518,14 = 1,050625X + 1,95122X$$

$$14\ 518,14 = 3,001845X$$

$$X = 4.836,41$$

Bileşik faiz kullanılırsa, X = €4.836,41 (20 Temmuz 2016'da ödenecek) ve 2X = €9.672,82 (20 Nisan 2017'de ödenecek).

Tahmin edebileceğiniz gibi, gerçek hayatta birçok (hatta yüzlerce) durumda nakit akımları arasında denklik kurmamız gerekebiliyor. Bu denkliği bireysel olarak kurmamız gerekince (örneğin nakit akımlarını tek tek ele alarak) bu gerçekten zor olabiliyor. Buna rağmen eğer bir veya iki koşul sağlanıyorsa denkliğin kurulması çok çok kolaylaşıyor. Gerçek hayatta bu çokça oluyor, bu konuları Bölüm 4 ve 5'te göreceğiz.

Alıştırmalar

Nakit Akımları Arasında Eşitlik

3.1 – Birkaç yıl evvel, Asuman 10% yıllık faiz oranından borç almıştır (efektif). Bu borç nedeniyle, 3 yıl sonra €10.000 ödeme yapması gerekiyor. Asuman borcunu şimdi kapatmayı düşünürse, aşağıdaki varsayımlarda ne kadar ödemesi gerekecektir :

i) Basit faiz kullanılırsa ?
ii) Bileşik faiz kullanılırsa ?

(i: €7.000 odak tarihi an 0 ise; €7.692,31, odak tarihi an 3 ise; ii: €7.513,15, odak tarihinin bir önemi yoktur)

3.2 – Ania'nın Karolina'ya şu şekilde iki farklı borcu vardır :

. €3.000 euro, 6 ay vadeli
. €5.000 euro, 10 ay vadeli

Ania iki borcu da 2 ay sonra kapatmak istiyor. 12% yıllık efektif faiz oranı varsayımında, aşağıdaki şartlarda ne kadar ödemesi gerekecektir :

i) Basit faiz?
ii) Bileşik faiz ?

(i: €7.480 odak tarihi an 2 ise; €7.469,39 odak tarihi an 0 ise; €7.500 odak tarihi an 6 ise; €7518,52 odak tarihi an 10 ise; ii: €7.524,94, odak tarihinin önemi yoktur)

3.3 – Ruta'nın Toma'ya 4 ay sonra ödemesi gereken €25.000 borcu vardır. Ancak Ruta ödeme tarihlerini şu şekilde değiştirmek istiyor, bir kısmını şimdi geri kalanını 9 ay sonra. Sonra ödenecek kısım, bugün ödenecek kısmın iki katı olacak şekilde. İki taraf güncelleme konusunda anlaşıyorlar. 9% yıllık nominal faiz oranı ve aylık hesaplanma kullanılacak. Aşağıdaki varsayımlarda Ruta bugün ve 9 ay sonra ne kadar ödemelidir :

i) Basit faiz kullanılırsa ?
ii) Bileşik faiz kullanılırsa ?

(i: €8.460,24 bugün, ve €16.920,48 ise 9 ay sonra, odak tarihi an 4 ise; ii: €8.454,52 bugün, ve €16.909,04 ise 9 ay sonra, odak tarihinin bir önemi yok)

3.4 – Öncekinin aynısı, ancak faiz oranının 9%, yıllık nominal, çeyreklik hesaplandığını varsayınız.

(i: €8.460,24 bugün, ve €16.920,48 ise 9 ay sonra, odak tarihi an 4 ise; ii:€8.453,65 bugün, ve €16.907,30 ise 9 ay sonra, odak tarihinin bir önemi yok)

3.5 – Bir firmanın bugün itibariyle aynı tedarikçiye aşağıdaki tutarlar kadar borcu vardır :

Tutar	Tarih
€12.500	1 ay vadeli
€3.500	7 ay vadeli
€8.000	14 ay vadeli

Bu firma 3 ayrı borcunu iki eşit taksit haline dönüştürmek istiyor, ilki 5 ay vadeli, ikincisi 1 yıl vadeli olacak şekilde. 6% yıllık nominal faiz oranı ve aylık faizlenme koşulunda, aşağıdaki durumlar için iki yeni ödemenin tutarını hesaplayın:

i) Durum 1: Basit faiz; odak tarihi: 6 ay sonrası
ii) Durum 2: Basit faiz; odak tarihi: bugün
iii) Durum 3: Bileşik faiz; odak tarihi: 6 ay sonrası
iv) Durum 4: Bileşik faiz; odak tarihi: bugün

(i: €12.139,24 ; ii: €12.143,60; iii: €12.141,27; iv: €12.141,27)

3.6 – Öncekinin aynısı, ancak faiz oranının 6%, yıllık nominal, çeyreklik hesaplandığını varsayınız. *(i: €12.139,24 ; ii: €12.143,60; iii: €12.140,56; iv: €12.140,56)*

3.7 – Örnek 3.5 ile aynı, ancak faiz oranının 6%, yıllık efektif olduğunu varsayınız.

(i: €12.139,24 ; ii: €12.143,60; iii: €12.137,44; iv: €12.137,44)

4. ANÜİTELER

4.1 - Anüitenin tanımı. Önemli konular. Anüite çeşitleri.

Not: *bundan sonra hep bileşik faizin kullanıldığını varsayacağız.*

Anüite: sıralı ödemelerdir (PMT), genellikle aynı tutarda olurlar, aynı zaman aralıklarında gerçekleşirler (diğer bir deyişle aynı sıklıkta).

Anüiteye örnekler: ev kiralarının ödemesi, mortgage kredileri, sigorta, tahvillerin kupon (faiz) ödemeleri, kredilerin geri ödemeleri, v.b..

Dikkat etmemiz gereken bazı **önemli kavramlar** var:

- **Ödemelerin aralığı** veya **anüite periyodu**: iki ardışık ödeme arasında geçen zaman. Herhangi bir periyot olabilir, ancak sabit olmalı, hep aynı olmalıdır (ay, çeyrek, sömestr, yıl v.b. ancak hep aynı).

- **Anüitenin başlangıç noktası**: ilk ödemenin gerçekleştiği andan bir periyot (1 ödeme aralığı) kadar önce yer alan andır.

- **Anüitenin gelecek değeri**: tüm ödemelerin (toplam) değeri, son ödemenin olduğu ana göre düşünülür. Çoğunlukla $\mathbf{FV_A}$ ile sembolize edilir. Ayrıca anüitenin **birikmiş değeri** olarak da adlandırılır.

- **Anüitenin bugünkü değeri**: tüm ödemelerin (toplam) değeri, anüitenin başlangıç noktasına göre düşünülür. Çoğunlukla $\mathbf{PV_A}$ ile sembolize edilir. Ayrıca anüitenin **iskontolanmış değeri** olarak da adlandırılır.

- **Anüitenin dönemi:** anüitenin toplam süresi

Farklı kriterlere göre bakılınca, **anüitenin birçok farklı tipini** göz önünde bulundurabiliriz. Örneğin,

Ödeme tutarlarına göre :

- **Sabit ödemeler:** anüitenin tüm ödemeleri aynı tutarda ise (ödeme **PMT** ile sembolize edilir).
- **Değişken ödemeler:** anüitenin tüm ödemeleri aynı tutarda değil ise.

Anüitenin dönemine göre :

- **Kesin anüite**: anüitenin bitiş tarihi önceden belirlenmiş ise (biliniyorsa). Örneğin: tahvilin kupon (faiz) ödemeleri.
- **Koşullu anüite**: anüitenin bitiş tarihi kesin olmayan bir olaya bağlı ise (veya bilinmiyorsa). Örneğin: sigorta.

Ödemelerin olduğu anlara göre :

- **Sıradan anüite**: her bir ödeme ilgili ödeme aralığının (periyodunun) sonunda yapılıyorsa.
- **Dönem başı anüite**: her bir ödeme ilgili ödeme aralığının (periyodunun) başında yapılıyorsa.
- **Gecikmeli anüite**: eğer ilk ödeme yapılana kadar birkaç periyotluk gecikme oluyorsa.

Faiz oranının vadesine göre veya anüitenin periyoduna göre:

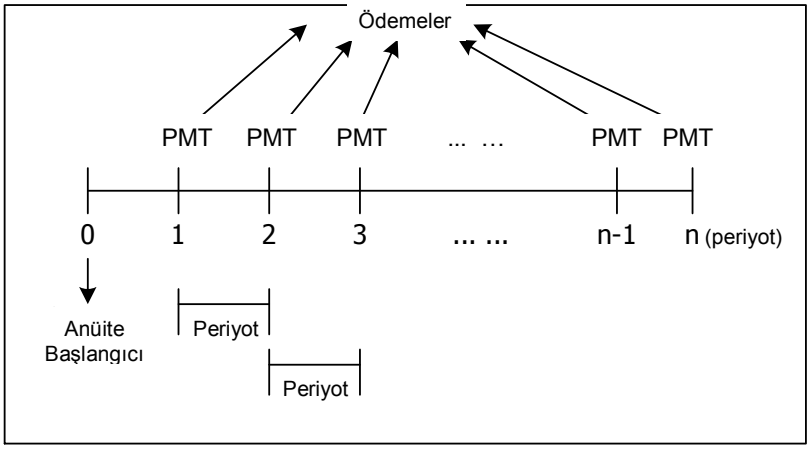
- **Basit anüite**: ödeme sıklığı ve faiz oranının vadesi aynı ise.
- **Genel anüite**: ödeme sıklığı ve faiz oranının vadesi farklı ise.

Anüitelerle hesap yaparken bu **gösterim**leri kullanacağız :

- **PMT** (veya sadece **p**): düzenli ödeme (sabit varsayılır)
- **n**: toplam ödeme sayısı
- **i**: faiz oranı, ödeme periyodu ile faizin aynı dönem için olduğu varsayılır
- $\mathbf{FV_A}$: anüitenin gelecek değeri
- $\mathbf{PV_A}$: anüitenin bugünkü değeri

Şimdilik anüitenin tüm ödemelerini eşit ve faiz oranının vadesinin ödeme periyodu ile aynı olduğunu, yani basit ve sabit anüite olduklarını varsayacağız. Daha sonra (Bölüm 4.5) genel anüiteleri -ki onun ödemeleri de sabittir- tartışacağız.

Buna göre bir anüite şu şekilde görselleştirilebilir :

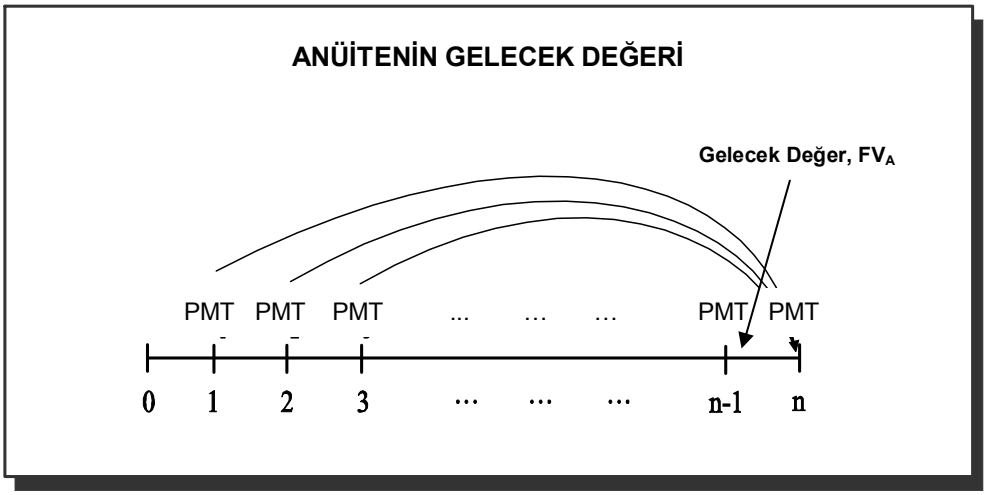


Bu durumda, sıradan, sıralı ve basit bir anüite var. Ödeme sayısı n'i bildiğimizi, anüitenin 0 anında başladığını ve faiz oranının vadesinin anüite ile aynı olduğunu varsayıyoruz.

Önemli açıklama: *Bu anüitenin sadece sembolik bir sunumudur. İlk ödemenin 1. anda ve son ödemenin n. anda olması bir zorunluluk değildir. Diğer bir deyişle, anüitenin başlangıcı her zaman 0 anında ve son ödeme her zaman n anında olmak zorunda değildir.*

4.2 - Basit anüitenin gelecek değeri.

Gördüğünüz gibi, **bir anüitenin gelecek değeri** son ödemenin olduğu an için tüm ödemelerin toplamının değeridir. Bu, tamamının değerinin o ana getirilmesi gerektiğini söyler (aslında tamamı değil, çünkü son ödeme zaten o anda olduğundan o getirilmez). Diyagramda şu şekilde gösterilebilir,



Analitik olarak, bu şekilde ifade edebiliriz:

$$\underbrace{FV_A}_{n.\,An} = \underbrace{\underbrace{PMT}_{1.\,An}(1+i)^{n-1}}_{n.\,An} + \underbrace{\underbrace{PMT}_{2.\,An}(1+i)^{n-2}}_{n.\,An} + \underbrace{\underbrace{PMT}_{3.\,An}(1+i)^{n-3}}_{n.\,An} + \ldots + \underbrace{\underbrace{PMT}_{n\text{-}2.\,An}(1+i)^{2}}_{n.\,An} + \underbrace{\underbrace{PMT}_{n\text{-}1.\,An}(1+i)^{1}}_{n.\,An} + \underbrace{PMT}_{n.\,An}$$

Bazı matematik işlemlerinden sonra ulaştığımız sonuç,

$$\boxed{FV_A = PMT\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Yukarıdaki kesir genellikle şu sembol ile gösterilir : $s_{\overline{n|}\,i}$, açılımı da, $\boxed{s_{\overline{n|}\,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$

O zaman sonuç olarak $\boxed{FV_A = PMT.s_{\overline{n|}\,i}}$ diyebiliriz.

Bu formül ile ilgili üç önemli özellik var :

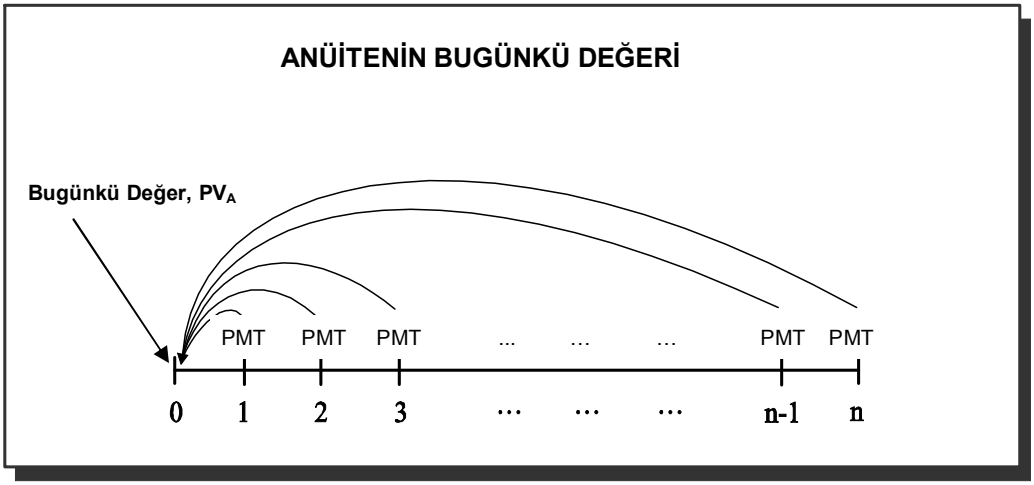
1. **FV_A:** bütün ödemelerin belirli bir andaki değeridir: son ödemenin olduğu andır;
2. **n:** toplam ödeme sayısıdır (*ödemeler*, *periyotlar* değil!);
3. **i:** anüitenin periyoduna dönüştürülmüş doğru faiz oranıdır.

Hesaplayacağımız şeyler neler olacaktır ? Dört farklı şey sayılabilir :

1. **FV_A:** eğer bilinmeyen bu ise, çözüm çok kolaydır; hesaplamak basittir (analitik olarak, finansal hesap makinesi ile veya anüite tablosu yardımıyla);
2. **PMT:** eğer bilinmeyen bu ise, çözüm yine çok kolaydır; bu da kolayca hesaplanabilir türdendir;
3. **n:** eğer bilinmeyen bu ise, denkliği analitik olarak çözebiliriz (logaritma ile) veya finansal hesap makinesi ile veya anüite tablosu yardımıyla. Ancak şunu akıldan çıkartmamalıyız ki, n ödemelerin toplam sayısıdır, bu yüzden tam sayı olmak zorundadır. Bu yüzden bazı problemlerde bir ödeme üzerinde düzeltme yapmamız gerekebilir. Bunu Örnek 14'de göreceğiz ;
4. **i:** eğer bilinmeyen bu ise, soruyu analitik olarak çözemeyiz. Finansal hesap makinesi ile veya anüite tablosu kullanmamız gerekecektir. Bunu Örnek 15'de göreceğiz.

4.3 - Basit anüitenin bugünkü değeri.

Görüldüğü gibi, **anüitenin bugünkü değeri** tüm ödemelerin toplam değerinin anüitenin başlangıç noktasındaki değeridir. Bu yüzden tüm ödemeler o noktaya göre iskontolanmalıdır (ilk ödeme dahil, çünkü o da başlangıçtan 1 periyot sonra olduğundan). Diyagramda şöyle görebiliriz,



Analitik olarak göstermemiz gerekirse :

$$\underbrace{PV_A}_{0.\,An} = \underbrace{\underbrace{PMT}_{1.\,An}(1+i)^{-1}}_{0.\,An} + \underbrace{\underbrace{PMT}_{2.\,An}(1+i)^{-2}}_{0.\,An} + \underbrace{\underbrace{PMT}_{3.\,An}(1+i)^{-3}}_{0.\,An} + \ldots + \underbrace{\underbrace{PMT}_{n\text{-}2.\,An}(1+i)^{-(n-2)}}_{0.\,An} + \underbrace{\underbrace{PMT}_{n\text{-}1.\,An}(1+i)^{-(n-1)}}_{0.\,An} + \underbrace{\underbrace{PMT}_{n.\,An}(1+i)^{-n}}_{0.\,An}$$

Gerekli sadeleştirme işlemlerinden sonra elde edeceğimiz formül,

$$\boxed{PV_A = PMT\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

Genellikle yukarıdaki formül böyle gösterilecektir $a_{\overline{n|}\,i}$, veya, $\boxed{a_{\overline{n|}\,i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$

Son olarak, en sade haliyle $\boxed{PV_A = PMT.a_{\overline{n|}\,i}}$

Tekrar ediyorum, bu formülle ilgili <u>üç önemli nokta</u> vardır :

1. **PV_A:** bütün ödemelerin <u>belirli bir andaki</u> değeridir: <u>anüitenin başlangıç noktasındaki;</u>
2. **n:** toplam <u>ödeme</u> sayısıdır (*ödemeler*, *periyotlar* değil!);
3. **i:** anüite ile aynı periyotta olan doğru faiz oranıdır

Burada neleri hesaplamamız gerekebilir, dört tane sayabliriz:

1. **PV_A:** eğer bilinmeyen bu ise, çözüm çok kolaydır (analitik olarak, finansal hesap makinesi ile veya anüite tablosu yardımıyla);
2. **PMT:** eğer bilinmeyen bu ise, çözüm yine çok kolaydır; bu da kolayca hesaplanabilir türdendir aynı yöntemlerle;
3. **n:** bilinmeyen bu ise, denkliği analitik olarak, (logaritma kullanarak) finansal hesap makinesi veya anüite tablosu ile çözebiliriz. Ama unutmamalıyız ki n <u>ödemelerin</u> sayısını ifade eder, bu yüzden tamsayı olmak zorundadır. Bu yüzden bazı problemlerde bir ödeme ile ilgili bir çeşit düzeltme gerekecektir (Örnek 14);
4. **i:** eğer bilinmeyen bu ise, analitik çözüm yapamayız. Finansal hesap makinesine veya anüite tablosu gerekecektir. Bunu Örnek 15'te göreceğiz.

4.4 - Herhangi bir andaki anüitenin değeri.

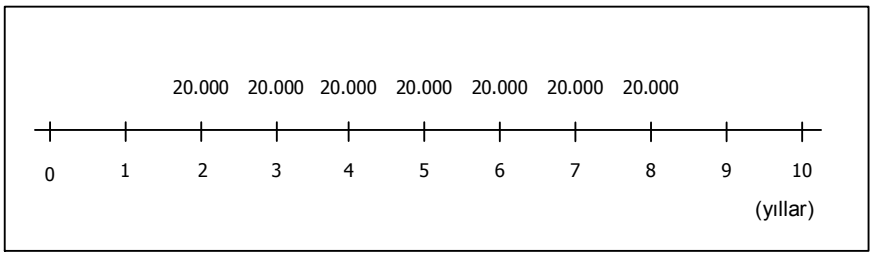
Bir anüitenin herhangi bir andaki değerini kolaylıkla hesaplayabiliriz. Ancak iki şeye çok dikkat etmeliyiz:

1. Biraz evvel gördüğümüz gibi, FV_A ve PV_A, anüitenin iki farklı anda, n sayıdaki ödemesinin birbirine denk olan farklı tutarlardır: son ödemenin gerçekleştiği an (FV_A) ve anüitenin *başlangıcı* dediğimiz an (PV_A);

2. Bileşik faizi kullanacağız, istediğimiz anlar arasında denkliği kurabiliriz, çünkü denklik mükemmel olacaktır, 2. ve 3. bölümlerde gördüğümüz gibi. Eğer FV_A veya PV_A 'yı doğru iskontolarsak veya faizlendirirsek, başka bir an için başka bir denk tutar elde edeceğiz. Ama unutmayın FV_A ve PV_A tek tutarlardır; bu yüzden onları sadece $(1+i)^n$ veya $(1+i)^{-n}$ ile çarparak iskontolayacağız veya faizlendireceğiz.

<u>Örnek 12</u>

Aşağıdaki anüitenin belirtilen anlar için değerlerini bulun, yıllık efektif faizin 15% olduğu varsayımıyla (değerler € cinsi):



a) 8 anındaki değer
b) 10 anındaki değer
c) 1 anındaki değer
d) 0 anındaki değer
e) 2 anındaki değer
f) 9 anındaki değer
g) 6 anındaki değer

Açıklamalar

Öncelikle bu bir basit anüite (ödemelerin periyodu faizin vadesi ile aynı) ve 7 ödemeden oluşuyor.

a) 8. an özel bir andır: son ödemenin yapıldığı zamandır. Bu yüzden, bu andaki değeri hesaplamak çok kolaydır: tam olarak FV_A 'ya eşit olacaktır.

$$\mathbf{V_8 = FV_A = 20.000\ s_{\overline{7}|0,15} = €221.335,98}$$

Peki bu gerçek hayattaki neye benzemektedir?
Örneğin şöyle bir şey olabilir: gelecek yıllarda para biriktirmeye karar verdin. Eğer 2 yıl sonradan başlayarak her yıl €20.000 biriktirirsen (bugünün 0. An olduğunu varsayıyoruz) ve bunu 7 yıl yaparsan (son yatırman 8. yılda olacak) ve faiz oranın 15% yıllık efektif ise, tam olarak -örneğin 8. anda- bankada ne kadar paran olacaktır, yani 7. Ve son ödemeyi yaptıktan hemen sonra ? Cevap: €221.335,98.

b) Anüitenin 10. andaki değerini hesaplamak için FV_A'yı 2 yıl faizlendirebiliriz, yani 8. andan 10. ana getiririz :

$$\mathbf{V_{10} = V_8\,(1+i)^2 = FV_A\,(1+i)^2 = 20.000\ s_{\overline{7}|0,15}\,(1+0,15)^2}$$

$$\mathbf{V_{10} = 221.335,98\,(1+0,15)^2 = €292.716,84}$$

Düşünün: bu gerçek hayatta ne olabilirdi, soru a)'da verilen örnek varsayıma göre ?

c) 1. An da bizim için özel bir andır: anüitenin başlangıç noktasıdır; yani istenen şey aslında PV_A'dır:

$$\mathbf{V_1 = PV_A = 20.000\ a_{\overline{7}|0,15} = €83.208,39}$$

Şimdi: bu gerçek hayatta ne olabilirdi?
Şöyle bir şey, örneğin bugün (0. an) ödeyeceğiniz 7 borcunuz var. Her yıl €20.000 ve 2 yıl sonra başlıyor. Bugünden 1 yıl sonra hepsini birden ödemek istersen kaç € olmalıdır ? Cevap: €83.208,39.

d) 0. Andaki anüitenin değerinin hesaplamak için V_1 'i bir yıl iskontolarız, yani 1. andan 0. ana getiririz :

$$\mathbf{V_0 = V_1\,(1+i)^{-1} = PV_A\,(1+i)^{-1} = 20.000\ a_{\overline{7}|0,15}\,(1+0,15)^{-1}}$$

$$\mathbf{V_0 = 83.208,39\,(1+0,15)^{-1} = €72.355,13}$$

Düşün: <u>bu gerçek hayatta ne olabilirdi</u>, soru c)'de verilen örneğe göre ?

Ayrıca, örneğin, V_8'i sekiz yıl iskontolamak da aynı şeydir, yani 8. Andan 0. Ana getirmek :

$$\mathbf{V_0 = V_8\,(1+0,15)^{-8} = 221.335,98\,(1+0,15)^{-8} = €72.355,13}$$

e) Anüitenin 2. Andaki değerini hesaplamak için sadece V_1'i bir yıl faizlendirmek yeterli olacaktır :

$$\mathbf{V_2 = V_1\,(1+i)^{1} = PV_A\,(1+0,15)^{1} = 20.000\ a_{\overline{7}|0,15}\,(1+0,15)^{1}}$$

$$\mathbf{V_2 = 83.208,39\,(1+0,15)^{1} = €95.689,65}$$

Bu değeri farklı bir yolla da hesaplayabiliriz. Örneğin, V_8'i altı yıl iskontolamak da aynı sonucu verecektir :

$$\mathbf{V_2 = V_8\,(1+i)^{-6} = FV_A\,(1+i)^{-6} = 221.335,98\,(1+0,15)^{-6}}$$
$$\mathbf{V_2 = €95.689,65}$$

f) Anüitenin 9. Andaki değerini hesaplamak için V_8'i bir yıl faizlendirmek yeterli olacaktır :

$$\mathbf{V_9 = V_8\,(1+i)^{1} = 221.335,98\,(1+0,15)^{1} = €254.536,38}$$

Bu değeri farklı bir yolla da hesaplayabiliriz. Örneğin, V_{10}'u bir yıl iskontolamak da aynı sonucu verecektir:

$$\mathbf{V_9 = V_{10}\,(1+i)^{-1} = 292.716,84\,(1+0,15)^{-1} = €254.536,38}$$

g) Anüitenin 6. Andaki değerini farklı yollarla bulabiliriz. Örnek olarak :

$$\underbrace{V_6}_{6.\ An} = \underbrace{\mathbf{20.000}s_{\overline{5}|\,0,15}}_{\substack{\text{6. Anda ifade edilmiş (son ödemenin} \\ \text{gerçekleştiği an) ilk 5 ödemenin değeri,} \\ \text{ya da bu anüitenin gelecek değeri}}} + \underbrace{\mathbf{20.000}a_{\overline{2}|\,0,15}}_{\substack{\text{6. Anda ifade edilmiş (anüitenin} \\ \text{başlangıcı) son 2 ödemenin değeri,} \\ \text{ya da bu anüitenin bugünkü değeri}}}$$

$$\mathbf{V_6 = 134.847,63 + 32.514,18 = €167.361,81}$$

V_6'yı hesaplamak için başka bir yol da,

$$\underbrace{V_6}_{6.\ An} = \underbrace{\underbrace{20.000 s_{\overline{4}|0,15}}_{\substack{\text{İlk 4 ödemenin 5. andaki değeri} \\ \text{(son ödemenin gerçekleştiği an)}}} (1+0,15)}_{\text{İlk 4 ödemenin 6. andaki değeri}} + \underbrace{20.000}_{\substack{\text{6. Anda gerçekleşen 5. Ödemenin değeri} \\ \text{(yani bunu iskontolamaya veya faizlendirmeye gerek yok)}}} + \underbrace{20.000 a_{\overline{2}|0,15}}_{\substack{\text{6. Anda ifade edilmiş} \\ \text{son 2 ödemenin değeri}}}$$

$$\mathbf{V_6 = 114.847,63 + 20.000 + 32.514,18 = €167.361,80}$$

Ayrıca denilebilir ki $V_6 = V_{10}\,(1+0,15)^{-4}$:

$$\mathbf{V_6 = 292.716,84\,(1+0,15)^{-4} = €167.361,80}$$

veya $V_6 = V_1\,(1+0,15)^5$:

$$\mathbf{V_6 = 83.208,39\,(1+0,15)^5 = €167.361,79}$$

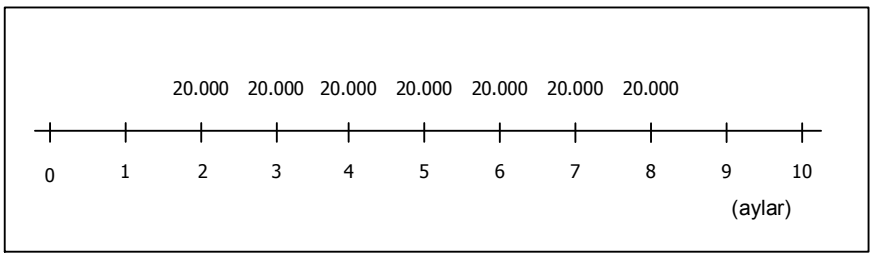
4.5 - Genel anüitelerde ''uzatma''.

Önceden gördüğümüz gibi, bir **genel anüite** sözkonusu ise kastedilen ödemelerin periyodu ile faiz oranının ifade edildiği periyot aynı değildir. Bunu kolayca çözeriz : öncelikle faiz oranını anüite ile aynı periyot için hesaplarız, doğru orantı veya denklik ilişkisini kullanarak, Bölüm 2'de bahsettiğimiz gibi. Ondan sonra, basit anüite elde etmiş oluruz. Bu adımdan sonra problemleri aynı öncekiler gibi çözeriz (mantık aynı olacaktır).

<u>Örnek 13</u>

Anüitenin değerini aşağıda belirtilen anlar için bulunuz, faiz oranının 12% olduğu varsayımı altında,

i) Yıllık efektif
ii) Yıllık nominal, aylık faizleniyor



a) 8. Andaki değer
b) 10. Andaki değer
c) 1. Andaki değer
d) 0. Andaki değer
e) 2. Andaki değer

<u>Açıklama</u>

Öncelikle, bunun bir genel anüite olduğunu hatırlayın (ödeme sıklığı: ay; faiz oranı: yıllık). Toplamda 7 ödeme var, 2. anda başlıyor ve 8. anda bitiyor.
İlk yapmamız gereken şey faiz oranını anüitenin periyodu ile aynı olacak şekilde hesaplamak, örneğin aylık, i_{12}.

Soru i)'de faiz oranı i = 0,12 (yıllık efektif).

O zaman, i_{12} denklik ilişkisi kullanarak hesaplanacaktır :

$$(1+i_{12})^{12} = (1+0,12)^{1} \Leftrightarrow i_{12} = 0,009489$$

Bundan sonra, herşey önceki örnek ile benzer olacaktır yani basit anüite çözümü gibi.

a) 8. An bizim için özel bir an: çünkü son ödemenin oluştuğu an. Bu yüzden, bu andaki değeri hesaplamak çok kolaydır: tam olarak FV_A'ya eşittir.

$$\mathbf{V_8 = FV_A = 20.000\ s_{\overline{7}|0,009489} = €144.048,92}$$

b) Anüitenin 10. andaki değerini hesaplamak için yapmamız gereken V_8'i (FV_A) iki ay için faizlendirmektir:

$$\mathbf{V_{10} = V_8\ (1+i_{12})^2 = FV_A\ (1+i_{12})^2 = 20.000\ s_{\overline{7}|0,009489}\ (1+0,009489)^2}$$

$$\mathbf{V_{10} = €146.795,65}$$

c) 1. An bizim için özel bir andır : çünkü anüitenin başlangıç noktasıdır; yani istediğimiz PV_A'yı bulmak:

$$\mathbf{V_1 = PV_A = 20.000\ a_{\overline{7}|0,009489} = €134.834,02}$$

d) Anüitenin 0. andaki değerini bulmak için sadece V_1'i bir ay iskontolamak yeterli olacaktır:

$$\mathbf{V_0 = V_1\ (1+0,009489)^{-1} = PV_A\ (1+i_{12})^{-1}}$$
$$\mathbf{V_0 = 20.000\ a_{\overline{7}|0,009489}\ (1+0,009489)^{-1}}$$
$$\mathbf{V_0 = €133.566,61}$$

Ayrıca, V_8'in sekiz ay iskontolanması da yine aynı şeydir :

$$\mathbf{V_0 = V_8\ (1+0,009489)^{-8} = 144\ 048,92\ (1+0,009489)^{-8}}$$
$$\mathbf{V_0 = €133.566,42}$$

e) Anüitenin 2. andaki değerini hesaplamak için V_1'i bir ay faizlendirmek yeterlidir:

$$\mathbf{V_2 = V_1\ (1+i)^1 = PV_A\ (1+0,009489)^1}$$
$$\mathbf{V_2 = 20.000\ a_{\overline{7}|0,009489}\ (1+0,009489)^1}$$
$$\mathbf{V_2 = €136.113,46}$$

Soru ii)'de faiz oranı $i_{(12)}$ = 0,12 (yıllık nominal, aylık faizleniyor). O zaman, i_{12} doğru orantılı bir ilişki kurularak bulunabilir:

$$i_{12} = 0,12/12 = 0,01$$

Bundan sonra, herşey önceki örneklerle benzerdir.

a) 8. An bizim için özel bir andır: çünkü son ödemenin oluştuğu an. Bu yüzden, bu andaki değeri hesaplamak çok kolaydır: tam olarak FV_A'ya eşittir.

$$\mathbf{V_8 = FV_A = 20.000\ s_{\overline{7}|0,01} = €144.270,70}$$

b) Anüitenin 10. andaki değerini hesaplamak için V_8'i (FV_A) iki ay faizlendirmek yeterlidir:

$$\mathbf{V_{10} = V_8\ (1+i_{12})^2 = FV_A\ (1+i_{12})^2}$$
$$\mathbf{V_{10} = 20.000\ s_{\overline{7}|0,01}\ (1+0,01)^2}$$
$$\mathbf{V_{10} = €147.170,55}$$

c) 1. An anüitenin başlangıcıdır; yani istenilen şey aslında tam olarak PV_A'dır:

$$\mathbf{V_1 = PV_A = 20.000\ a_{\overline{7}|0,01} = €134.563,89}$$

d) Anüitenin 0. andaki değerini hesaplamak için V_1'i bir ay için iskontolamak yeterlidir:

$$\mathbf{V_0 = V_1\ (1+0,01)^{-1} = PV_A\ (1+i_{12})^{-1}}$$
$$\mathbf{V_0 = 20.000\ a_{\overline{7}|0,01}\ (1+0,01)^{-1}}$$
$$\mathbf{V_0 = €133.231,57}$$

Ayrıca, V_8'i sekiz ay iskontolamak yine aynı sonucu verecektir:

$$\mathbf{V_0 = V_8\ (1+0,01)^{-8} = 144\ 270,70\ (1+0,01)^{-8} = €133.231,57}$$

e) Anüitenin 2. andaki değerini hesaplamak için V_1'i bir ay faizlendirmek yeterlidir:

$$\mathbf{V_2 = V_1\ (1+i)^1 = PV_A\ (1+0,01)^1 = 20.000\ a_{\overline{7}|0,01}\ (1+0,01)}$$
$$\mathbf{V_2 = €135.909,53}$$

Şimdi bilinmeyen n ve sonuç tam olmayan bir sayı olduğunda (Örnek 14) ve bilinmeyen i olduğunda (Örnek 15) soruyu nasıl çözeceğimize bakalım bu iki örnek ile.

<u>Örnek 14</u>

Her ay $150 birikim yaptığını düşün. Yıllık nominal faiz oranı 6% ise $10,000 toplamına ulaşmak için kaç ay birikim yapmalısın ?

<u>Açıklama</u>

Öncelikle, aylık faiz oranına ihtiyacımız var, çünkü anüitenin periyodu 1 ay. Bunun için doğru orantı ilişkisini kullanacağız çünkü faiz oranı nominal oran. O zaman,

$$i_{12} = 0.06/12 = 0.005$$

Elimizdeki bilgiler

$FV_A = \$10,000$
$PMT = \$150$
$i_{12} = 0.005$
$n = ?$

Çözüme geçelim:

$$10{,}000 = 150\, s_{\overline{n}|0.005}$$

$$10{,}000 = 150\frac{(1+0.005)^n - 1}{0.005}$$

$$1.333333 = 1.005^n$$

$$\ln 1.333333 = n \ \ln 1.005$$

$$n = 57.6801$$

Sonuç: $10,000'a tam sayı olacak şekilde aylık $150 yatırımlarla ve 0.5% faiz ile ulaşılamıyor. 57 yatırma yeterli olmuyor, 58 yatırmada ise FV $10,000'dan fazla oluyor.

Tam olarak $10,000'e ulaşmak için yapabileceğimiz şeyler şunlar olabilir,

1. *58 yatırma olsun, 57 tanesi $150 tutarında ancak sonuncu yatırım ise $150'dan az olacak (x tutar diyelim) şekilde; veya*

2. *57 yatırma olsun, 56 tanesi $150 tutarında ancak sonuncu yatırım ise $150'dan fazla olacak (y tutar diyelim).*

Peki tam olarak x'i (1. durumda) veya y'yi (2. durumda) nasıl buluruz? Sadece doğru denklikleri kurmamız gerekecek:

<u>Durum 1</u>: $10{,}000 = 150\, s_{\overline{57}|0.005}\,(1+0.005)^1 + x$

$$10{,}000 = 150\frac{(1+0.005)^{57} - 1}{0.005}(1+0.005)^1 + x$$

$$x = \$86.14$$

Dikkat edin, sonuncu olan 58. ödeme, $150 tutarındaki 57. ödemeden bir ay sonra yer alacak ve sonuncu olan x ödemesi yapıldığı anda $10,000'e ulaşılacak.

<u>Durum 2</u>: $10{,}000 = 150\, s_{\overline{56}|0.005}\,(1+0.005)^1 + y$

$$y = \$285.46$$

Dikkat edin, sonuncu olan 57. ödeme, $150 tutarındaki 56. ödemeden bir ay sonra yer alacak ve sonuncu olan y ödemesi yapıldığı anda $10,000'e ulaşılacak.

Peki ya bilinmeyen faiz oranı, *i olursa*?

<u>Örnek 15</u>

Şu şekilde bir finansal ürün teklifi aldığınızı düşünün:

. 48 ay boyunca her ay $100 birikim yapacaksınız;

. Son ödemeyi yaptığınız anda (yani 48. Yatırma ile tam olarak aynı anda) $5.000 nakit para alacaksınız. Yıllık efektif faiz oranı nedir ?

Açıklama

Herşeyden önce, hesaplamamız gereken oran i_{12}, yani aylık faiz oranı çünkü anüitenin periyodu da aylık.

i_{12}'yi hesaplamak için kurulacak denklik

$$5{,}000 = 100\, s_{\overline{48}|i12}$$

$$5{,}000 = 100\frac{\left(1+i_{12}\right)^{48}-1}{i_{12}}$$

Analitik olark çözülemiyor. Ancak bir finansal hesap makinesi veya anüite tablosu ile çözmek oldukça kolaydır. Sonuç ise $i_{12} = 0.00172645$ veya diğer deyişle 0.1726% (aylık). O zaman yıllık efektif faiz oranı böyle hesaplanabilir

$$(1+i)^1 = (1+0.00172645)^{12} \Leftrightarrow i = 0{,}020915$$

4.6 - Devamlı Eşit Ödemeler (Perpetuity).

Çoğunlukla bu hiç bitmeyen bir anüite olarak tanımlanmaktadır. Aslında bu eksik bir açıklamadır. Sonlu bir anüitenin de (belli ve az sayıda ödemeden oluşan) bir "perpetuity" olmasına imkan vardır. Bir anüitenin "sonsuz" olup olmamasında belirleyici unsur sadece ödeme sayısı değildir, ödeme sayısı ve faiz oranı birlikte belirleyicidir. Faiz oranı burada çok önemli bir rol oynar.

Sonsuz anüitelere gerçek hayattan örnekler hisse (varlık) değerlemesi, firma değerlemesi, sonsuza kadar ödeneceği varsayılan bir hibe ödemesi, sigorta v.b'dir.

Sonsuz anüitede tek istenilen bugünkü değerinin bulunmasıdır, aslında bu sonludur çünkü zamanla daha ileride oluşan ödemelerin bugünkü değerleri azalır (ve gittikçe daha çok azalır ve sonunda 0'a yakınsar) Sonsuz bir anüitenin gelecek değeri ise anlamsız sonuç verecektir, çünkü sonsuza gitmektedir.

Anüitenin bugünkü değerini nasıl hesaplarız? $n \to \infty$ varsayarsak şöyle yazılabilir :

$$PV_{A(\infty)} = PMT\frac{1-\left(1+i\right)^{-\infty}}{i} = PMT\frac{1}{i}$$

$$\boxed{PV_{A(\infty)} = \frac{PMT}{i}}$$

Burada iki önemli nokta var (aslında bu yeni bir şey değil; anüitelerde de aynıydı, daha önce görmüştük):

1. Bugünkü değer, $PV_{A(\infty)}$, hesaplanırken, sonsuz anüitenin başlangıcındadır;

2. Faiz oranı i, sonsuz anüitenin periyodu ile aynı periyot için ifade edilmiş olmalıdır.

Örnek 16

Bir hayırsever Viseu Politeknik Enstitüsü'nün en iyi öğrencisine sonsuza kadar sürecek bir hibe vermek istiyor. Hibe miktarı €1.000, her yıl ödenecek ve bir yıl sonra başlayacak. Faiz oranının %5 olduğu düşünülürse (yıllık efektif) bu bağışın tümünü bugün yapması için vereceği tutar ne kadar olmalıdır?

Açıklama

Kısaca diyebiliriz ki bu kişi sonsuz anüitenin bugünkü değerini bağışlamalıdır, yani bu tutar şöyle ifade edilebilir:

$$PV_{A(\infty)} = \frac{PMT}{i} = \frac{1.000}{0,05} = 20.000$$

Şimdi de bunun nedenini kavramaya çalışalım: bu kişi €20.000 parasını bankaya yatırıyor. Banka yıllık %5 efektif faiz ödüyor. Yani yılda €1.000 faiz getiriyor. Bu parayı almak yerine bu kişi faiz kazancını okulun en iyi öğrencisine bağışlıyor. Ve bu her yıl, sonsuza kadar sürüyor.

Bu kişi €20.000'yu bankadan hiç çekmeyecek. Aslında bu büyük bir marifet değil: yılık %5'ten, 50 yıl içinde bu €20.000'nun değeri bugünün 1.744'suna denk olacaktır :

$$20.000(1+0,05)^{-50} = €1.744$$

Ve bugünden 100 yıl sonra paranın değeri :

$$20.000(1+0,05)^{-100} = €152...$$

Peki ya faiz oranı 10% olsaydı,

1. *Bu kişinin bankaya sadece €10.000 yatırması yeterdi:* $\left[PV_{A(\infty)} = \frac{1.000}{0,10} = €10.000\right]$*; ve*

2. *50 yıl sonra, €10.000'nun değeri sadece bugünün €85'su kadar olacaktır ...*

$$10.000(1+0,10)^{-50} = €85$$

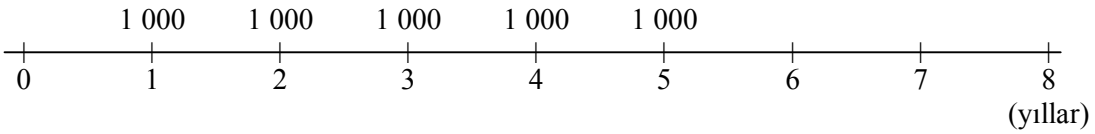
Alıştırmalar

Anüiteler

4.1 - Aşağıdaki anüitenin %10 faiz varsayımında belirtilen anlar için değerlerini hesaplayınız (Değerler € cinsi):

i) 0. An
ii) 5. An
iii) 1. An
iv) 8. An

i) den iv) e kadar her biri için gerçek hayattan örnekler bulmaya çalışın.



(i: V_0 = €3.790,79; V_5 = €6.105,10; V_1 = €4.169,87; V_8 = €8.125,89)

4.2 - 18 tane yıllık ve sabit ödemeden oluşan bir anüitenin bugünkü değeri $30,000'dır. Faiz oranı ise yıllık 12%'dir. Her bir ödemenin ne kadar olduğunu hesaplayın, bu duruma gerçek hayatta örnek olabilecek bir durumu düşünün.

(PMT = $4,138.12)

4.3 - Düzenli ve eşit ödemelerden oluşmuş bir anüitenin gelecek değerinin $100,000 olduğu biliniyor. Ayrıca faiz oranı 8% ve her bir ödeme $3,297.69 tutatında ise bu anüitenin toplam ödeme sayısını bulunuz. Buna uygun gerçek hayattan bir örnek ne olabilirdi ?

(n = 16)

4.4 - 10 yıl boyunca her yıl €10.000 tutarında yatırılan paraların gelecek değeri €158.000'dur. Yıllık faiz oranını hesaplayın ve buna gerçek hayattan ne örnek olabilirdi düşünün.

(i = 9,819%, finansal hesap makinesi ile veya anüite tablosuyla)

4.5 - Agata aşağıdaki tutarları alacaklısına ödemekle yükümlüdür:

- Yıllık, toplam 5 defa ve her biri €1.000;
- Sonra, yıllık, toplam 5 defa ve her biri €2.000.

i) Bu ödeme serisinin bugünkü değerini yıllık 11,5% faiz oranından hesaplayın. Gerçek hayatta ne olabilirdi?

(PV_A = €7.885,67)

ii) Bu ödeme serisinin gelecek değerini yıllık 11,5% faiz oranından hesaplayın. Gerçek hayatta ne olabilirdi? *(FV_A = €23.420,02)*

4.6 - Yıllık, 10 ödemeden ve her biri $10,000'dan oluşan bir anüitenin bugünkü değerini ve gelecek değerini hesaplayın, dördüncü yılın sonuna kadar faiz oranı 9%, ondan sonraki yıllarda ise 10% olacak şekilde.

(FV_A = $158,171.87; PV_A = $63,250.96)

4.7 - Her bir çeyrekte (3 ayda bir) ve toplam 44 çeyrek boyunca her bir ödemesi €200 olan bir anüitenin bugünkü değerini ve gelecek değerini aşağıdaki durumlar için hesaplayın:

i) Yıllık efektif faiz oranı 9,5%.
ii) Yıllık nominal faiz oranı 9,5% her çeyrek faizleniyor.
iii) Yıllık nominal faiz oranı 9,5% altı ayda bir faizleniyor.
iv) Yıllık nominal faiz oranı 9,5% aylık faizleniyor.

(i: FV_A = €14.935,19; PV_A = €5.503,71; ii: FV_A = €15.232,62; PV_A = €5.423,04; iii: FV_A = €15.129,65; PV_A = €5.450,55; iv: FV_A = €15.303,56; PV_A = €5.404,33)

4.8 - Jerina bankaya altı yıl boyunca her yıl €5.000 tutarında para yatırdı. Faiz oranı yıllık %7. Sonra bütün biriken parasını 10 eşit parça halinde altı ayda bir çekmeye karar verdi. İlk çekim son yatırmadan iki yıl sonra olacak şekilde çekecektir. Aynı 7% yıllık efektif faiz kullanılıyor. Altı ayda bir olacak çekimlerin tutarını hesaplayın.

(PMT = €4.745,79)

4.9 - Dagmara ödemeleri yıllık $1,000 tutarında olan ve 10 eşit ödemeden oluşan bir anüiteyi ilki bugünden 2 yıl sonra gerçekleşen ve ödemeleri vade başında olan 20 tane 6 aylık eşit ödeme ile değiştirmeyi istiyor. Yıllık efektif faiz oranının 8.5% olduğu varsayımda her bir altı aylık ödemenin tutarını hesaplayın.

(PMT = $433.39)

4.10 - Austéja $100,000 tutarında bir borç almıştır. Bu borç çeyreklik ve her biri $5,250 tutarında ödemelerle geri ödenecektir, olabildiğince çok olacak şekilde. İlk ödeme bir yıl sonra yapılacaktır. Faiz oranı 12% yıllık nominaldir ve aylık faizlenmektedir.

i) Bu borcun her biri $5,250'a eşit tutarındaki ödemelerle tamı tamına ödenemeyeceğini kanıtla.

ii) Son ödeme olan x'i öyle ayarlayın ki, $5,250'dan az ama yakın olsun ve borç tam olarak doğru ödensin.

iii) Son ödeme olan y'yi öyle ayarlayın ki, $5,250'a yakın ama fazla olsun ve borç tam olarak doğru ödensin.

(i: n = 33,419...; tamsayı değil, yani imkansız; ii: x = $2,219.06; iii: y = $7,403.80)

4.11 - Sigarayı bırakmak isteyenlere uygulanacak tıbbi tedavinin tutarı €500'dur. Bu parayı aynı zamanda her ayın sonunda toplam 12 ay taksitle her bir ödeme €42,93 olacak şekilde ödemek de teklif ediliyor.

i) Ödenecek yıllık efektif faiz oranı nedir?

(Not: soruyu çözemeseniz bile, en azından doğru denkliği kurun)

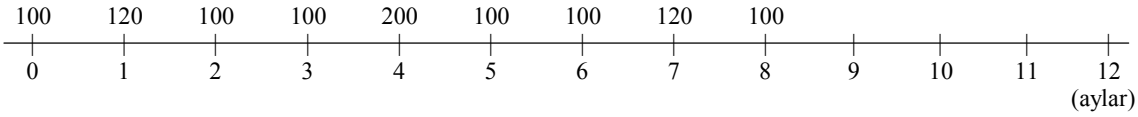
ii) António'nun sigarayı bıraktığını düşünelim. Bu şekilde her ay sigaraya harcadığı €95'yu biriktirecektir. Aynı zamanda bira içmeyi de azaltıp buradan da her ay €55 tasarruf etmek istiyor. Bu parayı (€150) her ayın sonunda bankaya yatırsa, 5% yıllık efektif faiz ile 10 yıl sonra kaç € birikim yapmış olur?

(i: i = 5,694%; ii: FV_A = €23.154,47)

4.12 - Zengin ve hayırsever bir kişi Viseu Politeknik Enstitüsü'nün en iyi öğrencisine devamlı bir burs bağlamak istiyor. Bugünden başlayarak 6 ayda bir €1.000 tutarında burs verecektir. Faiz oranı yıllık efektif 5,0625% ise bu bursun hepsini şimdi vermesi için ne kadar burs vermelidir?

(V_0 = €41.000)

4.13 – Emilia aşağıda belirtilen ödemeleri yapmakla yükümlüdür (tutarlar € cinsi):



Faiz oranının 10% yıllık nominal olduğu varsayılıyor, çeyreklik faizleniyor ve 4. Bölüm'de gösterilen teknikler kullanılıyor (örneğin, 3. Bölüm'de olduğu gibi değil, her bir nakit akımını tek tek faizlendirmek veya iskontolamak),

i) Tüm ödemelerin 0. andaki ve 12. andaki değerlerini hesaplamak için denklikleri kurunuz.

(V_0 = €1.006,53)

ii) Bu değerlerin yarattığı durumun gerçek hayattan doğru bir örneğini hayal edip anlatınız.

(V_{12} = €1.105,57)

4.14 - Bir bilgisayar mağazası müşterilerine borçlarını ödemek için 3 farklı yol sunuyor:

i) Nakit (alım sırasında ödeme);

ii) 30%'u peşin alım sırasında, gerisi 12 ay eşit taksitlerle, bir ay sonra başlayacak şekilde;

iii) 20%'si peşin alım sırasında, gerisi 4 defa eşit çeyreklik ödemelerle, üç ay sonra başlayacak şekilde

Diana $1,000 değerinde bir bilgisayar satın aldı. Diana, ii) şıkkını tercih ederse ne kadar aylık ödemeleri olur, iii) şıkkını tercih ederse ne kadar çeyreklik ödemeleri olur ? Faiz oranını 16% yıllık efektif varsayınız.

(PMT = $63.16 aylık veya PMT = $219.25 çeyreklik)

4.15 - Despoina $60,000 biriktirinceye kadar her yıl belli miktar para tasarruf etmeye karar veriyor. Şimdiden başlayarak her yıl $5,000 tasarruf edebileceğini düşünüyor. Banka 5% yıllık efektif faiz ödemeyi teklif ediyor. Despoina bu şartlar altında hedefine tam olarak ulaşabilir mi ? Cevap hayırsa, son ödemesini diğerlerinden daha yüksek olacak şekilde hesaplayınız, ancak $5,000 ödemelerinden olabildiğince çok olacak şekilde olmalıdır.

(Despoina 8 defa $5,000 yatırmalı, 9. Ödemesinin tutarı ise $9,867.18 olmalıdır)

4.16 - Önceki örnekteki durumu ele alın. Despoina'nın istediği tutarı ($60,000) istediği yolla biriktirdiğini düşünün. Şimdi de parasını ilk çekimi son yatırmasından 3 ay sonra başlayacak şekilde, 36 ayda eşit tutarlar şeklinde çekmek istiyor. Aynı faiz oranı varsayımında, aylık alacağı tutar ne kadar olacaktır ?

(PMT = $1,809.92)

4.17 – Aşağıda belirtilen ödemeleri inceleyin (€ cinsinden):

50	50	100	100	150	100	100	200	100	100	150		
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

(aylar)

Faiz oranını 9% yıllık nominal varsayın. Çeyreklik faizleniyor ve olabildiğince çok 4. Bölüm'de bahsedilen teknikler kullanılmalı. Bütün bu ödemelerin 0. andaki ve 12. andaki değerlerini doğru denklikleri kurarak hesaplayınız.

(V_0 = €1.150,51; V_{12} = €1.257,60)

5. BORÇLARIN AMORTİZASYONU

5.1 - Temel kavramlar ve anahtar değişkenler.

Bir borç farklı yollarla amortize edilebilir. Aslında dikkate alınması gereken bir şey vardır: finansal denklik, her bir an için alınan tutarlar (nakit girişleri, borç alanın eline geçen tutarlar) ve ödenen tutarlar (nakit çıkışları, borç alanın elinden çıkan tutarlar) için kurulmalıdır.

Bununla beraber, bazı amortisman yöntemleri diğerlerinden daha çok kullanılır. Biz burada iki sistemden kısaca bahsedeceğiz: "Fransız Sistemi" (sabit ödemeler) ve "İtalyan Sistemi" (sabit amortismanlar veya anapara).

Öncelikle, bazı kavramları ve değişkenleri tanıyalım. Bu kavramlar ve değişkenler hangi sistem olduğuna bakılmaksızın kullanılacaklardır.

<u>Bazı önemli kavramlar ve gösterimler</u>:

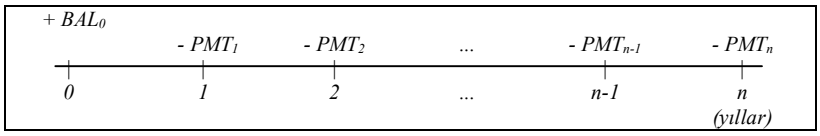
- **Borç tutarı** veya **ilk borç (D_0** veya **PV)**: ödünç alınan tutar.
- **Borç (**veya **bakiye)** belirtilen bir anda, k, veya bir ödemeden sonra, k **(D_k** veya **BAL_k)**: belirtilen anda halen ödenmesi gereken borç tutarı, k, veya sonraki bir ödemede, k;
- **Ödeme** sayısı k **(p_k** veya **PMT_k)**: genellikle iki bileşenden oluşur: faiz ve amortizasyon (veya anapara). Sadece anapara borcu azaltır.
- **Faiz,** k ödemesinde bulunan **(I_k** veya **INT_k)**: (k-1) periyodunda kalan borç üzerinden hesaplanan ödeme bölümü. Borcu azaltmaz. $\mathbf{I_k = D_{k-1}.i}$ **(**veya $\mathbf{INT_k = BAL_{k-1}.i}$**)**
- **Amortizasyon** veya **anapara,** k ödemesinde bulunan **(m_k** veya **PRN_k)**: ödemenin borçtan çıkartılmış bölümü.

  $$\mathbf{m_k = p_k - I_k} \text{ (veya } \mathbf{PRN_k = PMT_k - INT_k}\text{)}$$

  O zaman, $\mathbf{p_k = m_k + I_k}$ (or $\mathbf{PMT_k = PRN_k + INT_k}$).

- **Faiz oranı (i):** ödemeler ile aynı periyotta ifade edilmiş olmalı örneğin, ödemeler aylık ise faiz oranı da aylık olmalıdır, Bölüm 2'de gördüğümüz gibi doğru hesaplanmalıdır.
- **Geri ödemesiz dönem**: borçlunun anapara geri ödemesi yapmadığı zaman (bu dönemde sadece faiz ödemesi yapılır) veya hiç ödeme yapmadığı zaman (bu dönemde borç bileşik faiz ile artmaya devam edecektir).

Bir borcun ödemesinin şu şekilde olduğunu varsayalım:



Buna göre varsayım odur ki, ödemeler her yıl yapılıyor, ilk ödeme borcun alınmasından bir yıl sonra yapılıyor. Bu varsayımları daha sonra çıkaracağız.

5.2 - Amortizasyon tablosu.

Amortizasyon tablosu borçlarla işlem yaparken çok kullanılan bir araçtır. Farklı görünümleri olmasına rağmen, ana bilgiyi içeren budur :

AMORTİZASYON TABLOSU

k Periyodu veya **k Ödemesi**	**k periyodu başındaki borç (k ödemesinden önce) (Bakiye) (D_{k-1} veya BAL_{k-1})**	**k ödemesindeki faiz (INT_k)**	**k ödemesindeki amortizasyon (anapara) (m_k veya PRN_k)**	**Ödeme k (p_k veya PMT_k)**
1	BAL_0	$INT_1=BAL_0.i$	PRN_1	$PMT_1=INT_1+PRN_1$
2	$BAL_1=BAL_0-PRN_1$	$INT_2=BAL_1.i$	PRN_2	$PMT_2=INT_2+PRN_2$
...	...	...	...	...
n-1	$BAL_{n-2}=BAL_{n-3}-PRN_{n-2}$	$INT_{n-1}=BAL_{n-2}.i$	PRN_{n-1}	$PMT_{n-1}=INT_{n-1}+PRN_{n-1}$
n	$BAL_{n-1}=BAL_{n-2}-PRN_{n-1}$	$INT_n=BAL_{n-1}.i$	PRN_n	$PMT_n=INT_n+PRN_n$

1. Bu iki tutar eşit olmak zorunda

Σ PRN=BAL_0

2. Bütün amortizasyonların toplamı borç tutarına eşit olmak zorunda

Amortizasyon tablosu ile ilgili iki not (amortizasyon sisteminden bağımsız olarak):

1. **$BAL_{n-1} = PRN_n$** (n: toplam ödeme sayısı)
   Aslında, $BAL_{n-1} > PRN_n$ ise, bu borcun henüz tamamen ödenmemiş olduğu anlamına gelir ve eğer $BAL_{n-1} < PRN_n$ ise, bu borcun gereğinden fazla ödenmiş olduğu anlamına gelir.

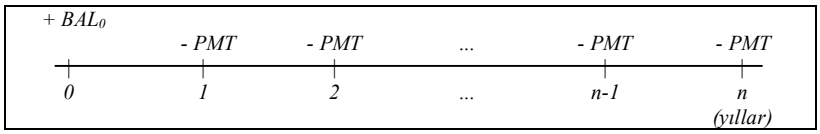
2. **Σ PRN = BAL_0**
   Aslında, sadece amortizasyonlar (PRN_k) borcu öder. Bu yüzden, bütün amotizasyonların toplam değeri borç tutarına eşit olmalıdır.

5.3 - Borç tutarlarını amortize etmek için iki sistem.

Daha önce dediğimiz gibi, borçlar farklı yollarla amortize edilebilir. Bundan sonra iki tanesini öğreneceğiz.

5.3.1 - Fransız Sistemi (sabit ödemeler)

Bu amortizasyon sisteminde, bütün ödemeler aynı tutardadır. Yani böyle bir şey olduğu söylenebilir :



Gördüğünüz üzere, tıpkı 4. Bölüm'deki anüiteler gibi. BAL_0 ve PV_A arasındaki benzerliklere dikkat edin. Aslında, BAL tüm *n* ödemelerinin (PMT) tam olarak bugünkü değeridir. O zaman, diyebiliriz ki $\boxed{BAL_0 = PMT.a_{\overline{n|}i}}$. Aslında, 4. Bölüm'de gördüğümüz gibi, $\boxed{PV_A = PMT.a_{\overline{n|}i}}$.

Örnek 17

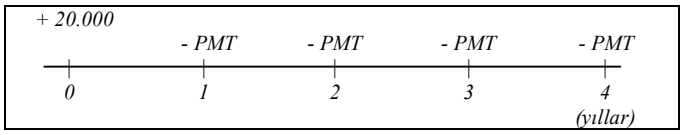
Bir kişi şu özelliklerde bir borç almıştır:
- Tutar: €20.000
- Vade: 4 yıl
- Faiz oranı: 6%, yıllık efektif
- Ödemeler: sabit, yıllık, borç alındıktan 1 yıl sonra başlıyor

Yapmak istediğimiz,
1. Her bir ödemenin tutarını hesaplayın, PMT[6]
2. Amortizasyon tablosunu kurun

Açıklama

1. Elimizdeki bilgiler:
$BAL_0 = €20.000$
$n = 4$ *(yıllık sabit ödemeler)*
$i = 6\%$ *(yıllık efektif)*
$PMT = ?$

Diyagramda böyle gösterilebilir:



O zaman,

$$\underbrace{20.000}_{\text{Borç tutarı (0. andaki)}} = \underbrace{PMT.a_{\overline{4}|\,0,06}}_{\text{4 Ödemenin 0. andaki değeri}}$$

$PMT = €5.771,83$

2. Amortizasyon tablosunda:

k Periyodu veya k Ödemesi	k periyodu başındaki borç (k ödemesinden önce) (Bakiye) (D_{k-1} veya BAL_{k-1})	k ödemesindeki faiz (INT_k)	k ödemesindeki amortizasyon (anapara) (m_k veya PRN_k)	Ödeme k (p_k veya PMT_k)
1	20.000,00	1.200,00	4.571,83	5.771,83
2	15.428,17	925,69	4.846,14	5.771,83
3	10.582,03	634,92	5.136,91	5.771,83
4	5.445,12	326,71	5.445,12	5.771,83

Amortizasyon tablosunun kurulumu hakkında açıklama:

1. PMT'nin hesaplanması: $20.000 = PMT.a_{\overline{4}|\,0,06} \Leftrightarrow PMT = €5.771,83$
2. INT_1 *'in hesaplanması :* $INT_1 = BAL_0.i = 20.000 \times 0,06 = €1.200$
3. PRN_1*'in hesaplanması:* $PRN_1 = PMT - INT_1 = 5.771,83 - 1.200 = €4.571,83$
4. BAL_1 *'nin hesaplanması :* $BAL_0 - PRN_1 = 20.000 - 4.571,83 = €15.428,17$
Ve böyle devam eder. 41. Sayfada anlatılanı unutmayın,
1. $BAL_3 = PRN_4$ *(5.445,12 >>amortizasyon tablosunun son satırı); ve*
2. *Tüm amortizasyonların toplamı* $\Sigma PRN = BAL_0$.

Fransız Sistemi ile ilgili bazı **ilginç noktalar** var, bunlar

[6] Buna bazen **EMI** denilmektedir **- Equated Monthly Installment**, (Denkleştirilmiş Aylık Taksit) özellikle bazı finansal hesap makinelerinde ve borç hesaplayıcılarında. EMI borçlunun alacaklıya her ayın belli gününde ödeyeceği düzenlenmiş ödeme tutarıdır. Bu linkte bir EMI hesap makinesi bulabilirsiniz: http://www.calculatorsoup.com/calculators/financial/emi-loan-calculator.php

1. Amortizasyonlar periyottan periyoda nasıl büyürler (Amortizasyon Yasası)
2. İlk amortizasyon (veya anapara, PRN_1)
3. Son amortizasyon (veya anapara, PRN_n)

- **Amortizasyonun Yasası**

Her ödemede borçlu, borcunun bir kısmını amortize eder; böylece zaman geçtikçe, borç gittikçe azalır; ve bu sebepten, her bir ödemedeki faiz tutarı da azalacaktır; ödeme sabit kalınca, amortizasyon (anapara) ödemeden ödemeye artacaktır. Bunu anlamak zor değil. İlginç olan şey ise Fransız Sitemi'nde amortizasyonlar özel bir şekilde artar : geometrik gelişim gösterirler, çarpım sabiti (1+i)'dir. Yani,

$$\underbrace{PRN_2}_{4.846,14} = \underbrace{\underbrace{PRN_1}_{4.571,83}(1+0,06)}_{4.846,14}\,; \qquad \underbrace{PRN_3}_{5.136,91} = \underbrace{\underbrace{PRN_2}_{4.846,14}(1+0,06)}_{5.136,91}\,; \qquad \text{... v.b. ...}$$

Böylece $\boxed{PRN_{k+1} = PRN_k(1+i)}$ olduğunu her k için kanıtlayabiliriz.

Ve,

$$\boxed{PRN_k = PRN_1(1+i)^{k-1}}$$

Genel olarak,

$$\boxed{PRN_k = PRN_j(1+i)^{k-j}}$$

Örneğimizde, daha önce de gördüğümüz gibi, PRN_1 = 4.571,83. Böylece amortizasyon yasasına göre denilebilir ki,

$PRN_3 = PRN_1\ (1+i)^2$
$PRN_3 = 4.571,83\ (1+0,06)^2$
$PRN_3 = 5.136,91$ (amortizasyon tablosunu kontrol et)

- **İlk amortizasyon (anapara)**

Biliyoruz ki

$BAL_0 = PRN_1 + PRN_2 + ... + PRN_{n-1} + PRN_n$

ve

$PRN_2 = PRN_1\ (1+i)$
$PRN_3 = PRN_2\ (1+i) = PRN_1\ (1+i)^2$
$PRN_4 = PRN_3\ (1+i) = PRN_1\ (1+i)^3$
... v.b. ...
$PRN_n = PRN_{n-1}\ (1+i) = PRN_1\ (1+i)^{n-1}$

Böylece,

$$BAL_0 = PRN_1 + PRN_1(1+i) + PRN_1(1+i)^2 + ... + PRN_1(1+i)^{n-1}$$

Bu demektir ki, BAL_0 aşağıdaki karakteristiğe ve geometrik diziye sahip sahip terimlerin toplamıdır:

. Dizinin ilk terimi (değer) (t_1) = PRN_1
. Dizideki terim sayısı (n) = n
. Çarpım sabiti (c) = (1+i)

Matematikten biliyoruz ki bütün bu n değerlerinin toplamının geometrik büyümesi, S_{GP}, şu şekilde ifade edilebilir

$$\boxed{S_{GP} = t_1 \frac{c^n - 1}{c - 1}}$$

Bu durumda aşağıdaki şekilde bir benzerlikler tablosu kurabiliriz:

Geometrik Dizi		Fransız Sistemi
S_{GP}	⇔	BAL_0
t_1	⇔	PRN_1
c	⇔	(1+i)
n	⇔	n

Yani Fransız Sistemi varsayımında denilebilir ki,

$$BAL_0 = PRN_1 \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$

$$BAL_0 = PRN_1 \underbrace{\frac{(1+i)^n - 1}{i}}_{s_{\overline{n|}i}}$$

$$\boxed{BAL_0 = PRN_1 . s_{\overline{n|}i}}$$

Ya da bir diğer deyişle, $\boxed{PRN_1 = \frac{BAL_0}{s_{\overline{n|}i}}}$

Örneğimizde:

$$PRN_1 = \frac{20.000}{\frac{(1+0,06)^4 - 1}{0,06}}$$

$$PRN_1 = \frac{20.000}{4,374616}$$

$PRN_1 = 4.571,83$ (amortizasyon tablosuna bakın)

- **Son amortizasyon (anapara)**

Biliyoruz ki $PMT_n = PRN_n + INT_n$ ki bu şununla aynıdır:

$$PMT_n = PRN_n + \underbrace{BAL_{n-1}.i}_{INT_n} \qquad \textbf{[1]}$$

Öte yandan, son amortizasyon, son periyodun başındaki borca eşit olmalıdır. Bu yüzden,

$$BAL_{n-1} = PRN_n$$

[1] ile yerini değiştirirsek elde edeceğimiz,

$$\underbrace{PMT_n}_{\text{Son ödeme}} = \underbrace{PRN_n}_{\text{Son amortizasyon}} + \underbrace{\underbrace{PRN_n}_{\text{Son periyodun başındaki borç tutarı}} . i}_{\text{Son faiz}}$$

O zaman,

$$\boxed{PMT_n = PRN_n(1+i)}$$

Veya

$$PRN_n = PMT_n(1+i)^{-1}$$

Fransız Sistemi'nde bu şekilde oluyor, $PMT_1 = PMT_2 = PMT_3 =... = PMT_n$. O zaman diyebiliriz ki:

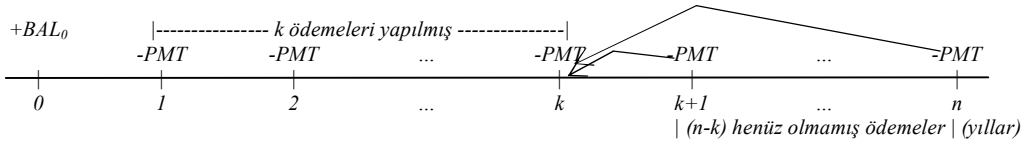
$$\boxed{PRN_n = PMT\,(1+i)^{-1}}$$

Örneğimizde 4 ödememiz var (n=4). O zaman, $PRN_4 = 5.771,83\ (1+0,06)^{-1}$, yani, $PRN_4 = 5.445,12$ (amortizasyon tablosunu kontrol edin).

- **Herhangi bir andaki borç**

k Ödemesinden sonraki borcu (BAL_k) hesaplamak için, aşağıdaki işlemi yapabiliriz:

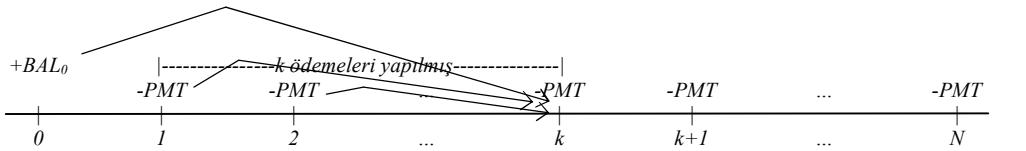
1. Henüz gerçekleşmemiş ödemeleri (n-k) k anına getirin (iskontolayın):



Bu BAL_k, elde edilişi ise $BAL_k = PMT.a_{\overline{n-k}|i}$

(k anında, henüz gerçekleşmemiş (n-k) ödemelerinin değeri)

2. Baştaki borç tutarını k anına getirin, sonrada gerçekleşmiş ödeme tutarlarını bundan çıkarın, yani bu ana kadar olan k ödemelerini:



Bu BAL_k, elde edilişi ise $BAL_k = BAL_0(1+i)^k - PMT.s_{\overline{k}|i}$ (değerler arasındaki farktan)

a) *Baştaki borç*, k anına getirilir; ve
b) Gerçekleşmiş olan tüm ödemeler de (k ödemeleri), k anına getirilirler

Örneğimizde 2. andaki borcu (yani hemen 2. Ödemeden sonra) şu şekilde hesaplayabiliriz:

1.

$$BAL_2 = \underbrace{5.771,83\frac{1-(1+0,06)^{-2}}{0,06}}_{\substack{\text{Kalan 2 ödemenin 2. andaki} \\ \text{değeri (henüz ödenmemiş)}}}$$

$$BAL_2 = 10.582,03 \quad \text{(amortizasyon tablosuna bakın)}$$

Veya bu yolla

2.

$$BAL_2 = \underbrace{20.000(1+0,06)^2}_{\substack{\text{2. andaki borcun değeri} \\ \text{(eğer henüz hiçbir şey ödenmemişse)}}} \underbrace{-5.571,83\frac{(1+0,06)^2-1}{0,06}}_{\substack{\text{Gerçekleşmiş 2 ödemenin} \\ \text{2. andaki değeri}}}$$

$$BAL_2 = 22.472 - 11.889,97$$

$$BAL_2 = 10.582,03 \quad \text{(amortizasyon tablosuna bakın)}$$

Şimdi daha önceden kabul ettiğimiz varsayımlara bakalım: ödemelerin yıllık olmaması durumunda ve/veya ödemenin ilk periyodun sonunda gerçekleşmemesi durumunda ne yapacağımızı görelim.

- **Toplam faiz**

Bir borçta toplam faizi nasıl hesaplayabiliriz? Bu toplam ödemeler ile borç tutarı arasındaki farka eşit olacaktır (veya, göreceğiniz üzere, Σ PRN). O zaman,

Σ INT = Σ PMT - Σ PRN

Şimdi: daha önceden kabul ettiğimiz varsayımlara bakalım. Ödemelerin yıllık olmaması durumunda ve/veya ödemenin ilk periyodun sonunda gerçekleşmemesi durumunda ne yapacağımızı görelim.

Ödemeler yıllık değil (veya başka bir deyişle, ödeme periyodu faiz oranı periyodundan farklı)

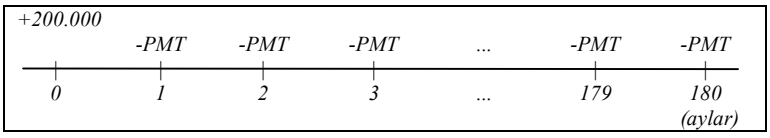
Ya faiz oranı ile ödemelerin periyodu farklı olursa? Sorun yok. Yapmamız gereken faiz oranını ödemeler ile aynı periyoda dönüştürmek (Bölüm 2, başlık 2.2'deki yöntem ile).

<u>Örnek 18</u>

€200.000 tutarındaki bir borç, 180 aylık sabit ödemelerle, ilki bir ay sonra başlayacak şekilde ve yıllık %14 efektif faiz oranıyla alınmıştır.
Amortizasyon Tablosunun ilk üç ve son satırlarını gösteriniz.

<u>Açıklama</u>

Elimizdeki bilgilere bakalım:



Ödemeler her ay gerçekleşiyor, ancak faiz oranı yıllık. Bu yüzden ilk olarak aylık faiz oranını hesaplamalıyız. Verilen oran efektif olduğundan denklik ilişkisini kurmalıyız.

$$(1+i_{12})^{12} = (1+0,14)^{1}$$
$$i_{12} = (1,14)^{1/12} - 1$$
$$i_{12} = 0,010979 \text{ (tam olarak } 0,010978852)$$

O zaman,

$$200.000 = PMT.a_{\overline{180}|\,0,010979}$$
$$200.000 = PMT.\frac{1-1,010979^{-180}}{0,010979}$$
$$200.000 = 78,323628PMT$$
$$PMT = €2.553,51$$

AMORTİZASYON TABLOSU

PMT sayısı	K periyodunun başındaki borç (BAL_{k-1})	k ödemesindeki faiz (INT_k)	k ödemesindeki amortizasyon (anapara) (PRN_k)	Ödeme k (PMT_k)
1	200.000,00	2.195,77	357,74	2.553,51
2	199.642,26	2.191,84	361,67	2.553,51
3	199.280,59	2.187,87	365,64	2.553,51
...	...	...	...	...
180	2.525,78	27,73	2.525,78	2.553,51

Açıklama:

1. *PMT'yi hesaplayın: PMT = €2.553,51 (as we just saw)*
2. *INT_1'i hesaplayın: $INT_1 = BAL_0.i_{12}$ = 200.000x0,010979 = €2.195,77**
   * *i_{12}'yi= 0,010978852 alıyoruz*
3. *PRN_1'i hesaplayın: $PRN_1 = PMT - INT_1$ = 2.553,51 – 2 195,77 = €357,74*
4. *Hesaplayın: $BAL_1 = BAL_0 - PRN_1$ = 200.000 – 357,74 =€199.642,26*

Ve böyle devam eder.

Peki son satırdaki tutarları önceki tüm değerler olmadan nasıl hesaplayacağız ? Kolay yollardan birisi şu olabilir:

a) $PRN_{180} = PRN_1\,(1+i_{12})^{179}$
   $PRN_{180} = 357,74\,(1+0,010978852)^{179}$
   $PRN_{180} = €2.525,79$
b) $BAL_{179} = PRN_{180}$
   $BAL_{179} = €2.525,79$
c) $INT_{180} = BAL_{179} \times i_{12}$
   $INT_{180} = 2.525,79 \times 0,010978852$
   $INT_{180} = €27,73$
d) $PMT_{180} = INT_{180} + PRN_{180}$
   $PMT_{180} = 27,73 + 2.525,79$
   $PMT_{180} = €2.553,52$

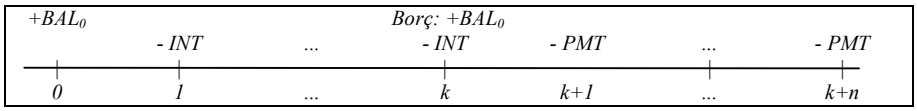
Amortizasyon Tablosu'nun son satırını hesaplamak için başka yollar da vardır. Bir veya iki tanesini söyleyebilir misin?

İlk ödeme ilk periyodun sonunda değilse

. Fransız Sistemi ve geri ödemesiz dönem

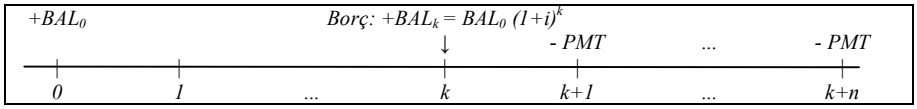
Bazen borçlunun borcunu amortize etmediği bir başlangıç dönemi bulunmaktadır.Bu dönemde sadece faiz ödenir, veya bazen ödemesiz olur. Buna geri ödemesiz dönem diyoruz.

1. Faiz ödemeli ''geri ödemesiz dönem'' (k periyoda kadar ödemesiz dönem)



Bu durumda k anaındaki borç BAL_0, çünkü önceki periyotlarda faiz ödenmiştir. Yani, $BAL_0 = PMT.a_{\overline{n}|i}$ aynı önceki gibi (buradaki tek fark, borçlunun geri ödemesiz dönemde faizini ödemesidir).

2. Faiz ödemesiz ''geri ödemesiz dönem'' (k periyoda kadar ödemesiz dönem)



Bu durumda k anındaki borç $BAL_k = BAL_0\ (1+i)^k$, çünkü önceki periyotlarda hiçbir ödeme yapılmadı. k Anından sona kadar, n sayıda ödememiz vardır. Yani, $BAL_0(1+i)^k = PMT.a_{\overline{n}|i}$. Tek yaptığımız şey BAL_0'I to k anına getirmek ve sonra BAL_k'yi normal bir anüite gibi hesaplamak.

<u>Örnek 19</u>

$50,000 tutarındaki bir borç 20 eşit çeyreklik taksitlerle 1 yıllık geri ödemesiz dönemden sonra ödenecektir. Yıllık nominal faiz 8%'dir ve çeyreklik faizlenmektedir.

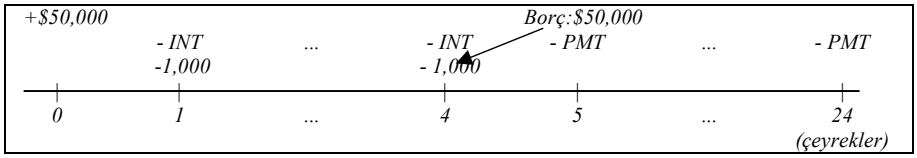
a) Borçlunun geri ödemesiz dönemde her çeyrekte faizi ödediğini düşünün. Bu kişi ilk yıl çeyreklik ve daha sonra ne kadar ödeyecektir?

b) Bu kişinin geri ödemesiz dönemde hiçbir ödeme yapmadığını varsayın. Bundan sonra ne kadar ödeyecektir?

<u>Açıklama</u>

a) Bu durumda, ilk yıl boyunca borçlu sadece faiz ödeyecektir.

INT = 50,000 x 0.02 = $1,000 *($i_4$ = 0.08/4 = 0.02)*



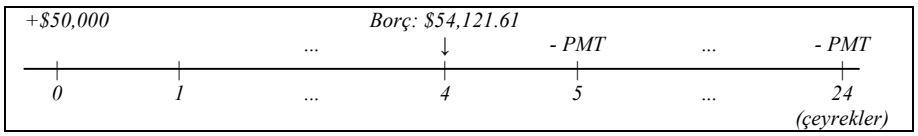
İlk yılın sonunda borç tutarı $50,000 olarak kalacaktır. Bundan sonra her bir ödemenin tutarını hesaplamak için yapacağımız şey:

$$50,000 = PMT.a_{\overline{20|}\,0.02}$$

$$50,000 = PMT.\frac{1-(1+0.02)^{-20}}{0.02}$$

$$PMT = \$3,057.84$$

b) Bu durumda, ilk yılın sonunda borç tutarı $50,000 (1+0.02)^4 = $54,121,61 olacaktır. Diyagramda görünüşü,



Yani, 5. andan 24. ana kadar her bir ödemenin değeri aşağıdaki denkliğin sonucunda bulunacaktır:

$$54,121.61 = PMT.a_{\overline{20|}\,0.02}$$

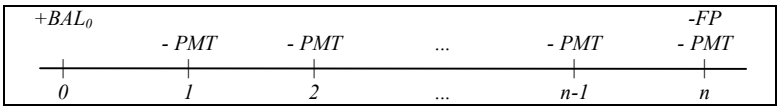
$$54,121.61 = PMT.\frac{1-(1+0.02)^{-20}}{0.02}$$

$$PMT = \$3,309.90$$

Leasing

Leasing için Fransız Sistemi'nin özel bir durumu diyebiliriz. Her zaman bir son ödeme vardır (FP) ve bazen de bir başlangıç ödemesi vardır (IP), diğer tüm ödemelerden farklı olarak. Bu bizim için herhangi bir zorluk yaratmaz. Aklımızda bulundurmamız gereken, denklik ilişkisi kullanılacaktır. Haydi bazı olağan örneklerine bakalım:

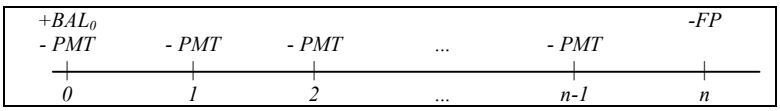
1. Başlangıç ödemesi yok; *n* tane sıralı sabit ödeme (PMT) ve bir tane son ödeme (FP) varsa



Buna karşılık gelen denklik şu olmalıdır,

$$\boxed{BAL_0 = PMT.a_{\overline{n|}\,i} + FP(1+i)^{-n}}$$

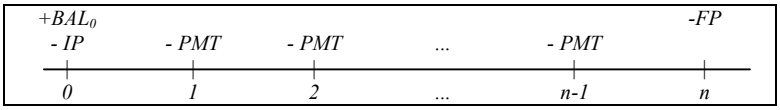
2. Başlangıç ödemesi yok; *n* tane sabit ödeme dönem başlarında (PMT) ve bir tane son ödeme (FP) varsa



Buna karşılık gelen denklik şu olmalıdır,

$$\boxed{BAL_0 = PMT.a_{\overline{n|}\,i}(1+i) + FP(1+i)^{-n}} \text{ or } \boxed{BAL_0 = PMT + PMT.a_{\overline{n-1|}\,i} + FP(1+i)^{-n}}$$

3. Bir başlangıç ödemesi (IP), ek olarak *(n-1) tane* sabit sıralı ödemeler (PMT) ve bir tane son ödeme (FP) varsa



Buna karşılık gelen denklik şu olmalıdır,

$$BAL_0 = IP + PMT.a_{\overline{n-1}|i} + FP(1+i)^{-n}$$

Şunu söylemekte fayda var, bu formüllerin hiçbiri sizin için yeni değil. Her birinde amaç nakit akımlarının değerini finansal denklik kullanılarak 0. ana getirmektir.

<u>Örnek 20</u>

Aşağıdaki koşullarda bir leasing işlemi düşünün:
- Borç: €20.000
- Vade: 4 yıl
- Faiz oranı: 6%, yıllık nominal, aylık faizleniyor
- Son ödeme: borcun 2%'si

Ödemeyi aşağıdaki durumlar için hesaplayınız:

1) Başlangıç ödemesi yok; 48 sıralı sabit ödeme ve son ödeme
2) Başlangıç ödemesi yok; 48 vade başında ödeme ve son ödeme
3) Başlangıç ödemesi: borcun 20%'si; 47 sıralı sabit ödeme ve son ödeme

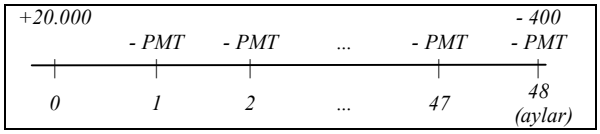
<u>Açıklama</u>

Aylık faiz oranını hesaplayarak başlıyoruz :

$$i_{12} = \frac{0,06}{12} = 0,005 .$$

Son ödemenin tutarı ise €400 (20.000 x 0,02).

1. Elimizde bu bilgiler var:

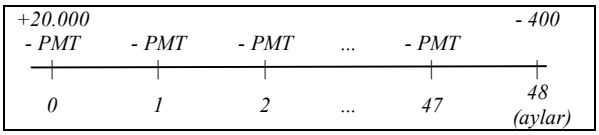


Yani,

$$\underbrace{20.000}_{\text{Borç } (0.\ An)} = \underbrace{PMT.a_{\overline{48}|\,0,005}}_{\substack{\text{48 Ödemenin 0. andaki değeri} \\ (\text{başlangıç noktasındaki})}} + \underbrace{400(1+0,005)^{-48}}_{\text{Son ödemenin 0. andaki değeri}}$$

PMT = €462,31

2. Şimdi elimizde bu var:

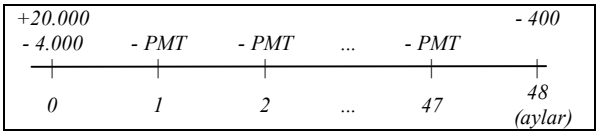


Yani,

$$\underbrace{20.000}_{\text{Borç (0. andaki)}} = \underbrace{\underbrace{PMT.a_{\overline{48}|\,0,005}}_{\substack{\text{48 Ödemenin -1. andaki değeri} \\ \text{(anüitenin başlangıcındaki)}}} (1+0,005)^{1}}_{\text{Value at 0. An}} + \underbrace{400\left(1+0,005\right)^{-48}}_{\text{Son ödemenin 0. andaki değeri}}$$

PMT = €460,01

3. Son olarak buna ulaşıyoruz:



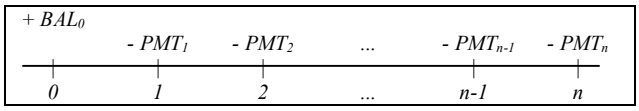
Yani,

$20.000 = 4.000 + PMT.\ a_{\overline{47}|0,005} + 400\ (1,005)^{-48}$

PMT = €375,30

5.3.2 - İtalyan Sistemi (sabit amortizasyon)

Bu sisteme göre adından da anlaşılacağı üzere sabit olan ödeme (PMT) değil amortizasyon'dur (anapara, PRN). Diyagramda,



Şimdi ödemeler sabit değil, çünkü amortizasyon sabit ve faiz her bir ödemede gittikçe azalacak.

Her amortizasyonda : $PRN = \dfrac{BAL_0}{n}$.

- **Herhangi bir andaki borç**

Bu sistemde herhangi bir andaki borç, BAL_k, PRN'nin henüz gerçekleşmemiş ödeme sayısı (n-k) ile çarpılması ile kolaylıkla hesaplanacaktır:

$$\boxed{BAL_k = (n-k).PRN}$$

- **Zaman içerisinde borç ve ödeme**

Faiz ve ödeme tutarının *PRN.i* her ikisi de periyottan periyoda azalacaktır. Aslında, biz *PRN*'i her bir ödemede amortize ediyoruz, yani sonraki her ödemede daha az faiz *PRN.i* ödüyoruz (ve tabi ki ödeme tutarı, çünkü *PRN* sabittir).

Bu demektir ki faiz de ödemenin ikisi de zamanla aritmetik gelişim gösterecektir, sabit ise *–PRN.i olacaktır* ("eksi" *PRN.i*).

- **Toplam faiz**

Biraz evvel denileni akıldan çıkarmadan, toplam faiz aritmetik dizinin tüm terimlerinin toplamına eşittir. Matematikten biliyoruz ki bu toplam

$$S_{AP} = n\frac{t_1 + t_n}{2}$$

Sembollerin anlamları

S_{AP}: dizideki n terimlerinin (değerlerinin) toplamı
t_1: dizinin ilk terimi
t_n: dizinin son terimi
n: dizideki terim sayısı

Yani, İtalyan Sistemi'nde

$$Toplam\ faiz = n\frac{INT_1 + INT_n}{2}$$

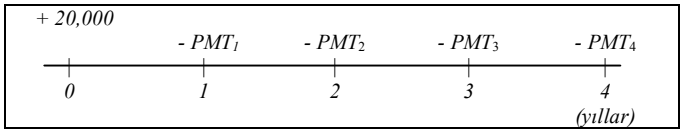
<u>Örnek 21</u>

Bir kişi şöyle bir kredi almıştır:
- Tutar: $20,000
- Vade: 4 yıl
- Faiz Oranı: 6%, yıllık efektif
- Ödemeler: yıllık, borcun alınmasından bir yıl sonra başlıyor, anapara tutarı sabit

Amortizasyon tablosunu kurunuz.

<u>Açıklama</u>

Anlamamız gereken şey, şimdi ödemeler sabit olmayacak. Bildiğimiz gibi faiz ve amortizasyon içeriyorlar. Bu durumda sadece amortizasyon (anapara) sabittir. Elimizdeki bilgiler şunlar:



Her bir ödemedeki anapara tutarını (PRN) kolaylıkla hesaplayabiliriz:

$$PRN = \frac{BAL_0}{n} = \frac{20,000}{4} = 5,000$$

Şimdi de amortizasyon tablosunu kuralım.

Ödeme (PMT) Numarası	k Periyodunun başındaki borç tutarı (BAL_{k-1})	k Ödemesindeki faiz tutarı (INT_k)	k Ödemesindeki amortizasyon (anapara) tutarı (PRN_k)	Ödeme k (PMT_k)
1	20,000.00	1,200.00	5,000.00	6,200.00
2	15,000.00	900.00	5,000.00	5,900.00
3	10,000.00	600.00	5,000.00	5,600.00
4	5,000.00	300.00	5,000.00	5,300.00

Açıklama:

1. PRNi' hesaplayın: $PRN = \frac{BAL_0}{n} = \frac{20,000}{4} \Leftrightarrow PRN = \$5,000$

2. INT_1*'i hesaplayın:* $INT_1 = BAL_0 . i = 20,000 \times 0.06 = \$1,200$

3. PMT_1*'i hesaplayın:* $PMT_1 = PRN + INT_1 = 5,000 + 1,200 = \$6,200$

4. $BAL_1 = BAL_0 - PRN = 20,000 - 5,000 = \$15,000$

Böylece devam eder.

Unutmayın ki:

1. $BAL_3 = PRN$ *(5,000.00 >> Amortizasyon Tablosunun son satırı);*
ve
2. Tüm amortizasyonların toplamı = $n.PRN = 4 \times 5,000.00 = BAL_0$

Bu amortizasyon sisteminden bağımsız olarak hep geçerlidir, daha önce de gördüğümüz gibi (Sayfa 41).

Alıştırmalar

Borçların Amortizasyonu

5.1 - Tristan €120.000 tutarında bir borç almıştır, 6 tane yıllık ve sabit ödeme ile geri ödenecektir. Faiz oranı 7% yıllık efektiftir.

i) Her yıl ne kadar ödeyecektir?
ii) İlk, dördüncü ve son ödemelerdeki anapara tutarını hesaplayın
iii) Dördüncü ödemeden sonraki borcu hesaplayın
iv) Beşinci ödemedeki faiz tutarını hesaplayın
v) Toplam faizi hesaplayın

(i: PMT = €25.175,50; ii: PRN_1 = €16.775,50; PRN_4 = €20.550,70; PRN_6 = €23.528,50; iii: BAL_4 = €45.517,75; iv: INT_5 = €3.186,24; v: Toplam faiz = €31.052,97)

5.2 - Önceki sorudaki borcu ele alın. Ancak bu sefer 2 yıllık bir geri ödemesiz dönem, sonrasında 6 tane yıllık sabit ödeme ile geri ödenecek. Önceki ile aynı soruları cevaplayın ancak şimdi şu varsayımlar altında:

a) Geri ödemesiz dönemde borçlu ilk ve ikinci yılların sonunda faiz ödeyecek
b) Geri ödemesiz dönemde borçlu hiçbir ödeme yapmayacak

(Soru a) i: PMT = €25.175,50; ii: PRN_1 = €16.775,50; PRN_4 = €20.550,70; PRN_6 = €23.528,50; iii: BAL_4 = €45.517,75; iv: INT_5 = €3.186,24; v: Toplam faiz= €47.852,97)
(Soru b) i: PMT = €28.823,43; ii: PRN_1 = €19.206,27; PRN_4 = €23 528,50; PRN_6 = €26.937,78; iii: BAL_4 = €52.113,28; iv: INT_5 = €3.647,93; v: Toplam faiz = €52.940,58)

5.3 - Christina şöyle bir leasing anlaşması imzalamıştır:

. Borç: $25.000
. Vade: 4 yıl
. Aylık ödemeler
. Faiz oranı: 6% (yıllık, nominal, aylık faizleniyor)
. Son ödeme: Borç tutarının 4%'ü kadar

Aşağıdakileri hesaplayın, 1, 2 ve 3. durumlar için daha önce öğrendiğimiz gibi (3. durumda başlangıç ödemesi borç tutarının 10%'udur):

i) Ödeme
ii) İlk yılın sonundaki borç
iii) 13. Ödemedeki faiz ve anapara tutarı
iv) İlk yılın sonunda faiz oranları 7,2% olursa yeni ödeme tutarı

(Durum 1) i: PMT = $568.64; ii: BAL_{12} = $19,527.44; iii: INT_{13} = $97.64; PRN_{13} = $471.00; iv: PMT' = $579.77)
(Durum 2) i: PMT = $565.81; ii: BAL_{13} = $18,961.58; iii: INT_{13} = $97.15; PRN_{13} = $468.66; iv: PMT' = $576.64)
(Durum 3) i: PMT = $519.53; ii: BAL_{12} = $17,479.04; iii: INT_{13} = $87.40; PRN_{13} = $432.13; iv: PMT' = $529.56)

5.4 - Çağla aşağıdaki şartlarda bir borç almıştır:

. Tutarı €100.000
. 5 yıl vadeli
. Çeyreklik sıralı ödemeler
. Faiz oranı: 8,2432% (yıllık efektif)
. İtalyan Sistemi

Hesaplayın:

i) 10. Ödemedeki anapara tutarı
ii) 8. Ödemeden sonraki borç tutarı
iii) 9. Ödemedeki faiz tutarı
iv) Toplam faiz
v) *(i: PRN = €5.000; ii: BAL_8 = €60.000; iii: INT_9 = €1.200; iv: Toplam faiz = €21.000)*

6. YATIRIM DEĞERLEMESİNİN TEMELLERİ.

6.1 - Somut yatırımlar ve finansal yatırımlar.

Somut yatırımlar: binalara, makinelere v.b'lere yapılan yatırımlar; finansal yatırımlar: paylara (hisse), tahvillere v.b'lere yapılan yatırımlar...

6.2 - Somut yatırımların evrimi.

Yatırıma ilişkin nakit akımları hesaplandığında, Paranın Zaman Değeri'nde daha önce gördüğümüz konseptleri değerlendirebiliriz. Burada zor olan bu nakit akımlarını tahmin etmektir. Onları kullanmak daha kolaydır. Burada iki tane klasik indikatör var: NPV (NBD, Net Bugünkü Değer) ve IRR (İç Verim Oranı).

. **NPV** yatırıma ilişkin tüm nakit akımlarının bugünkü değerlerinin toplamıdır (pozitif eksi negatif). Eğer NPV>0 ise, bu yatırım kazançlı, eğer NPV<0 ise, bu yatırım kazançsızdır.

. **IRR** İç Verim Oranı, tüm nakit akımlarının NPV'ini 0'a eşitleyen iskonto oranıdır. Teorik olarak bu noktaya "Başabaş Noktası" da denilmektedir.

Örnek 22

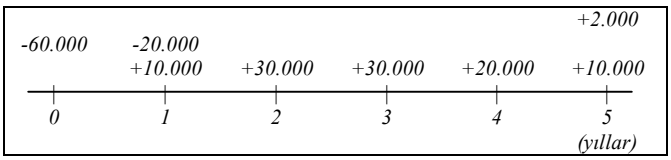
Varsayalım ki, yoğun bir çalışmadan sonra bir yatırımın üreteceği nakit akımları aşağıdaki gibi bulunmuştur (değerler €):

Yıl	*Yatırım*	*Nakit Akımı*
0	*- 60.000*	
1	*- 20.000*	*10.000*
2		*30.000*
3		*30.000*
4		*20.000*
5		*10.000*

Ayrıca düşünüyoruz ki, bu yatırım 5. yılın sonunda €2.000 tutarında son bir nakit akımı daha yaratacak. 12% yıllık faiz varsayımında bu yatırım ile ilgili ne karar verilebilir?

Açıklama

Elimizdeki bilgiler şunlar:



Yatırımı değerlendirmek için onun NPV'ini (Net Bugünkü Değer) hesaplayabiliriz:

$$\underbrace{NPV}_{0.\,An} = \underbrace{-60.000}_{0.\,An} + \underbrace{\underbrace{(10.000-20.000)}_{1.\,An}(1+0,12)^{-1}}_{0.\,An} + \underbrace{\underbrace{30.000}_{2.\,An}(1+0,12)^{-2}}_{0.\,An} +$$

$$+\underbrace{\underbrace{30.000}_{3.\,An}(1+0,12)^{-3}}_{0.\,An} + \underbrace{\underbrace{20.000}_{4.\,An}(1+0,12)^{-4}}_{0.\,An} + \underbrace{\underbrace{(10.000+2.000)}_{5.\,An}(1+0,12)^{-5}}_{0.\,An}$$

$$NPV = €-4.139,86$$

Bu yatırım cazip görünmüyor (NPV<0).

IRR'yi kullanarak da aynı sonuca ulaşabiliriz:

$$0 = -60.000 + (10.000-20.000)(1+IRR)^{-1} + 30.000(1+IRR)^{-2} +$$
$$+30.000(1+IRR)^{-3} + 20.000(1+IRR)^{-4} + (10.000+2.000)(1+IRR)^{-5}$$

IRR değeri bir finansal hesap makinesi veya anüite tablosu yardımıyla kolaylıkla hesaplanabilir. Bu örnekte, IRR = 9,6% (yaklaşık olarak). 12%'den az olduğundan getiri beklenenden az, bu yüzden bu yatırım projesi red edilecektir.

6.3 - Finansal yatırımların evrimi.

Paylar (hisseler) bir şirketin sermayesidir. Pay sahipleri de bu durumda, şirketin sahipleridir. İki farklı kazanç beklemektedirler: Hisseleri elde tutarken kar paylarından ve hisselerinin satışından. Ancak tabi ki ikisi de belirsizdir. Kar payları dağıtılmayabilir, dağıtılsa bile tutarları yine de belirsizdir. Ve tabi, kimse diyemez ki pay sahipleri paylarını satmaya karar verdiklerinde payların fiyatı alım fiyatlarından daha yüksek olacaktır. Yani paylar riskli varlıklardır/yatırımlardır.

Borç senetleri şirketlerin ve devletlerin borçlanmasını sağlayan bir finansal enstrümandır. Bunların birçok çeşidi vardır. Ancak biz tek bir çeşidi üzerinde duracağız, Sabit kuponlu hazine bonoları. Bunlar çok az riskli varlıklardır, çünkü borçlu devlettir ve faiz oranı (kupon oranı) da sabittir. Aslında bunlar risksiz varlık sayılmaktadırlar. Yatırımcının elde etmeyi beklediği gelir faiz geliridir. Faiz, bononun nominal değeri üzerinden hesaplanır. Bononun vadesinin sonunda yatırımcı aynı zamanda itfa değerini (çoğunlukla nominal değer) de alır.

Örnek 23

ABC payları hakkındaki bilgiler şunlardır:

. Güncel fiyat: $39.20

. Gelecek yılların kar payı tahminleri:

1. Yılın sonunda: $1.20

2. Yılın sonunda: $1.00

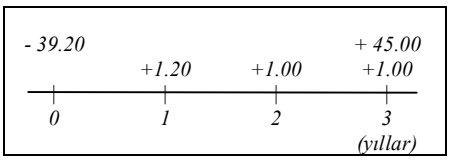
3. Yılın sonunda: $1.00

3. Yılın sonunda olması beklenen fiyat: $45.00

Verilen bilgiler ışığında bu paylara yatırım yapmak cazip mıdır?

Açıklama

Elimizdeki bilgiler şunlar:



O zaman, yıllık getiriyi (r) şu denkliği çözerek hesaplayabiliriz:

$39.20 = 1.20(1+r)^{-1} + 1.00(1+r)^{-2} + 46.00(1+r)^{-3}$

r=7.3% (finansal hesap makinesi veya bilgisayar ile hesaplanır).

Peki bu cazip mıdır? İki temel etmene göre ''değişir'':

1. *Piyasadaki benzer riskteki varlıkları faiz oranına göre. Eğer aynı risk derecesinde daha yüksek getiri sağlayan varlıklar bulabilirsek, bu yatırım cazip olmayacaktır;*

2. *Yatırımcının risk profiline göre. Eğer yatırımcı riskten hoşlanmıyorsa, bu kişi getiri oranını yatırımın riskine göre yeterli bulmayabilir.*

Örnek 24

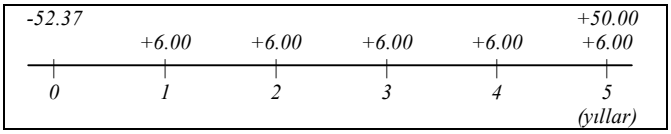
Şu özellikte bir hazine bonosunu düşünün:

. Güncel fiyat: $52.37
. Nominal değer: $50.00
. İtfa değeri: $50.00
. Kupon (faiz) oranı: 12% (yıllık)
. Vadesi: 5 yıl
. Yatırımcının getiri beklentisi: 10%

Bu yatırımcı bu bonoları almalı mıdır?

Açıklama

Eğer bu yatırımcı bu bonoları bugün alırsa her biri için $52.37 ödeyecek ve her yıl $6.00 faiz (50.00 x 0.12) ve vade sonunda artı olarak $50.00 itfa bedelini alacaktır. Diyagramda:



Böylece, bononun bugünkü değeri şu olacaktır,

$$\underbrace{Değer}_{0.\ An} = \underbrace{6.00a_{\overline{5}|0.10}}_{0.\ An} + \underbrace{\underbrace{50.00}_{5.\ An}(1+0.10)^{-5}}_{0.\ An}$$

Bugünkü değer = $53.79

Mevcut piyasa fiyatı $52.37; yani, bu yatırımcı bu bonoyu almak isteyecektir, çünkü yapılan değerlemeye göre bu bono "ucuz" (maliyeti: $52.37 değeri: $53.79).

Bu yatırımı değerlemenin bir diğer yolu getiri oranını bulmaktır (İç Verim Oranı'na benzer, ancak bonolarda buna Vadeye Kadar Getiri denilmektedir).

$$\underbrace{52.37}_{0.\ Andaki\ Değer} = \underbrace{6.00a_{\overline{5}|YTM}}_{0.\ An} + \underbrace{\underbrace{50.00}_{5.\ An}(1+YTM)^{-5}}_{0.\ An}$$

Bir finansal hesaplama makinesi veya bilgisayar kullanarak,

YTM = 10.73% (>10%, yani yatırımcıya göre bu iyi bir yatırımdır).

Alıştırmalar

Sabit yatırımlar

6.1 - Bir sabit yatırımın aşağıdaki tablodaki nakit akımlarını yaratması beklenmektedir (değerler € cinsinden):

Yıl	Yatırımlar	Nakit Akımları
0	- 500.000	
1	- 120.000	80.000
2		120.000
3		300.000
4		250.000
5		100.000

Ayrıca bu yatırımın 5. yılın sonunda €70.000 tutarında pozitif bir artık değer yaratması bekleniyor. Faizin yıllık 15% olması varsayımında bu yatırımı nasıl değerleyebilirsiniz? Neden? Peki ya bu yatırımı değerlemek için faiz oranı yıllık 12% olsaydı?

(Faiz 15% iken, cazip değil: NPV = €-19.332; IRR = 13,75%; Faiz 12% iken, cazip: NPV = €28.825)

Pay Senedi

6.2 - Mantas ABC hisselerinde olası bir yatırımı çalışmaktadır, bilgiler şöyledir:

. Güncel fiyat: €3,35
. Kar payı tahminleri:
1. Yılın sonunda: €0,20
2. Yılın sonunda: €0,22
3. Yılın sonunda: €0,23
. 3. Yılın sonunda payın tahmini değeri: €4,15

Eğer Mantas'ın beklediği getiri oranı yıllık 12% ise bu payları almalı mıdır, almamalı mıdır?

(Almalıdır, çünkü payın gerçek değeri €3,46'dır ancak şu anki fiyatı €3,35'dur; Veya IRR (İç verim oranı) yöntemini kulanarak: IRR = 13,41%, yani Mantas'ın istediği getiriden (12%) fazla, yani almaya karar vermelidir)

Borç Senedi

6.3 - Aneta aşağıdaki koşullar altındaki bir Hazine Bonosuna yatırım yapıp yapmamayı düşünmektedir:

. Piyasa fiyatı: €54,11
. Nominal değeri: €50,00
. İtfa değeri: €50,00
. Kupon (faiz) oranı: 8% (yıllık)
. Vadesi: 4 yıl
. Yatırımcı tarafından beklenen getiri: 6%

Aneta bu yatırımı yapmalı mıdır ?

(Hayır, çünkü bononun gerçek değeri €53,47 etmektedir ancak bugünkü piyasa fiyatı €54,11'dur; Veya IRR (İç verim oranı) yöntemini kulanarak: IRR = 5,65%, yani Aneta'nın beklediğinden (6%) az, yani almamaya karar vermelidir)