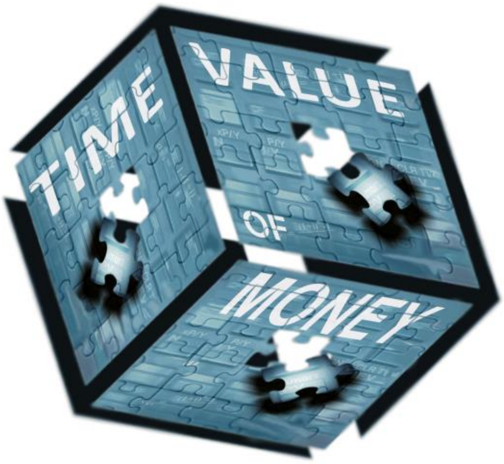


Rogério Matias

Vertė: Rugilė Mikalainytė
Julius Miniotas

ĮVADAS Į

PINIGŲ LAIKO VERTĘ

2 leidimas **2021 lapkritis**

www.time-value-of-money.com

Turinys

Keletas žodžių apie mane ir apie šiuos užrašus

Esu dėstytojas iš Portugalijos. Beveik 30 metų dėstytojauju Escola Superior de Tecnologia e Gestão, kuri yra viena iš penkių mokyklų, sudarančių Instituto Politécnico de Viseu.

Mano mėgstamiausias kursas yra *Cálculo Financeiro (Finansų Matematika)*, kuris remiasi pinigų laiko vertės koncepcija ir pritaikymu realioms gyvenimiškoms situacijoms.

Prieš keletą metų pradėjau mokyti Erasmus studentus iš daugelio Europos valstybių (dažniausiai iš Vokietijos, Graikijos, Lietuvos, Lenkijos, Ispanijos, Turkijos), kurie nusprendė pasirinkti *Time Value of Money* kursą, specialiai pritaikytą Erasmus studentams.

Esu parašęs keletą akademinių knygų apie *Cálculo Financeiro*, sėkmingai adaptuotų daugybėje universitetų, ne tik Portugalijos, bet ir kitose portugališkai šnekančiose šalyse, įskaitant Angolą, Mozambiką, Žaliojo Kyšulio salas ir Braziliją.

Akademinių tekstų rašymas yra tai, ką aš mėgstu daryti. Todėl ir nusprendžiau paruošti užrašus anglų kalba, kurie padėtų Erasmus studentams, lankantiems *Time Value of Money* kursą, geriau suprasti jo esmę.

Laikui bėgant kai kurie studentai susisiekia su manimi norėdami pranešti, kad šie užrašai buvo jiems naudingi vėlesnėse studijose ar net darbe. Tai privertė mane pagalvoti, kad šie užrašai gali būti naudingi taip pat ir kitiems studentams.

Nusprendžiau padaryti juos visiems nemokamai prieinamus pasitelkus interneto prieigą (www.time-value-of-money.com)

Kiekvienas gali parsisiųsti šiuos užrašus. Tačiau būčiau labai dėkingas jei galėtumėte minėtame interneto puslapyje palikti trumpą užrašų įvertinimą, patiko jie jums ar ne. Jūsų nuomonė, pasiūlymai, korekcijos man yra labai reikšmingi ir svarbūs.

Paskutinis pastebėjimas: tekste aš naudosiu tiek euro, tiek ir US dolerio valiutas. Atitinkamai aš naudosiu europietiškus ir amerikietiškus žymėjimus skaičiams, t.y. €1.234,56 arba $1,234.56, taip pat 0,05 ir 0.05, atitinkamai.

Nuoširdžiai tikiuosi, kad šie užrašai jums bus naudingi.

Julius Miniotas.

Kelerius pastaruosius metus dirba finansų rinkų srityje. Užėmė finansų maklerio, išvestinių finansinių priemonių specialisto ir struktūrizuotų finansinių instrumentų vystytojo pareigas. Šiuo metu dirba finansų rinkų verslo vystymo srities projektų vadovu. Studijavo VGTU, VU ir (London School of Economics). Erasmus programą atliko Instituto Politécnico de Viseu, Portugalijoje.

Rugilė Mikalainytė.

Po bakalauro studijų VGTU, Erasmus programos Instituto Politécnico de Viseu, Portugalijoje, ekonomikos magistro studijų VU dirbo rinkos tyrimų kompanijoje finansų vadovo asistente, farmacijos kompanijoje buhalterijos skyriuje. Šiuo metu darbuojasi energetikos sektoriui priklausančioje tarptautinėje kompanijoje, finansų skyriuje.

Man teko privilegija sutikti Rugilę ir Julių, kurie 2009 metais, kaip Erasmus studentai, studijavo Instituto Politécnico de Viseu, Portugalijoje.

Gavau progą sutikti ne tik nuostabius studentus, bet ir puikias asmenybes.

Nuo to laiko mes vis dar palaikome ryšį. Praėjus septyneriems metams po studijų, kai aš paprašiau jų bendradarbiauti verčiant šiuos užrašus į Lietuvių kalbą, abu nedvejodami pasakė „taip“!

Aš esu tikrai laimingas, dėkingas ir pagerbtas, kad jie priėmė šį iššūkį.

Rogério Matias
2016 birželis

Pakeitimai

Data	Pokytis	Puslapis (-iai)	Pakeitė
2021.11.22	Mes norime pakeisti tuos du pirminius mokėjimus (€5.000 2017 ~~vasario~~ sausio 20 d. plius...	21	Gintvilas Miškinis Rokas Duoniela
2021.11.22	Mums reikia nustatyti centinę datą, t.y. datą, kuria mes norime išreikšti visus pinigų srautus. Sakykime, kad tai yra 2017 ~~vasario~~ sausio 20 d[5].	21	Gintvilas Miškinis Rokas Duoniela
16.04.14	Pirmasis leidimas		

1. PRISTATYMAS

1.1 Pinigų laiko vertė

Įsivaizduokite, kad laimėjote €1.000 prizą ir esate klausiami ar pageidaujate jį atgauti dabar, ar po vienerių metų. Greičiausiai visi norėtų atgauti prizą šiandieną.

Tiesą sakant, mes įvertiname skirtingai tą pačią pinigų sumą priklausomai nuo momento, kada ji tampa mums prieinama. Mes linkę įvertinti daugiau tą patį pinigų kiekį jei jis mums yra prieinamas anksčiau. Kodėl? Tam turime svarių priežasčių. Pavyzdžiui, jei turime pinigus šiandien:

1. Mes galime nusipirkti daiktų, kurių mums reikia arba kurie tiesiog atneša mums laimės;
2. Mes galime nusipirkti daiktų šiandien, kurie gali būti pabrangę po metų (infliacija);
3. Mes galime pasidėti indėlį banke ir po metų atgauti didesnę sumą nei padėjome;
4. Mes galime padėti dalį sumos kaip indėlį, o kitą dalį išleisti;
5. Mes eliminuojame riziką negauti pinigų ateityje, kuri gali kilti dėl įvairių priežasčių. Kuo vėliau gaunami pinigai, tuo didesnė rizika jų netekti (kuo greičiau gaunami pinigai, tuo rizika jų netekti yra mažesnė);

Tai iliustruoja **laiko** svarbą bet kurioje situacijoje, kuri yra susijusi su pinigais, ir dažniausiai yra žinoma kaip „**pinigų laiko vertės**“ koncepcija.

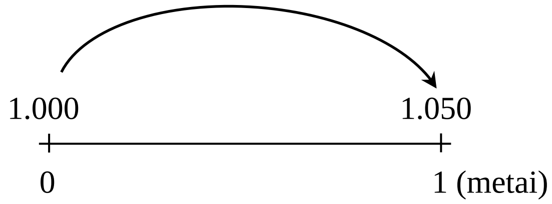
Kiekvieną kartą, kai turime reikalų su skirtingais kiekiais pinigų, turime turėti omenyje: €1.000 šiandien nėra tas pats kas €1.000 po metų (arba bet kuriuo metu ateityje ar praeityje). Yra taip tarsi šios dvi sumos yra išreikštos *skirtingais vienetais*, tad tiesiogiai palyginti jų negalime. Negalime tiesiog jų sudėti ar atimti. Jeigu dėl kažkokių priežasčių mums prireikė atlikti su jomis veiksmus, visų pirma mums reikia jas padaryti tiesiogiai palyginamas, o tai reiškia išreikšti jas *tais pačiais vienetais*. Pavyzdžiui, jeigu mėgintumėme juos tiesiog sudėti, tai būtų tas pats kas bandyti sudėti kilometrus ir metrus (skirtingus vienetus). Tai būtų siaubinga klaida. Žinoma, visų pirma mums reikia pasiversti visas sumas vienodais vienetais (nesvarbu ar tai yra metrai, ar kilometrai, ar bet kokie kiti vienetai, svarbu, kad jie būtų vienodi).

Kuomet turime reikalų su pinigų sumomis (vadinkime jas *pinigų srautais*) idėja išlieka nepakitusi. Mes privalome išreikšti juos tais pačiais *vienetais*. O kas apibrėžia vienetą, kai turime reikalų su pinigais? **Laikas**! Taigi mes privalome išreikšti kiekvieną pinigų srautą **tuo pačiu laiko momentu**. Tik tada, kai visi pinigų srautai yra išreikšti tame pačiame laiko momente, mes galime juos lyginti, sudėti ar atimti.

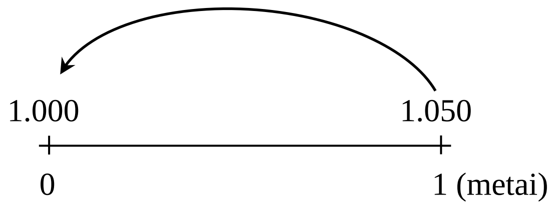
Auksinė finansų matematikos taisyklė: siekiant teisingai palyginti arba atlikti veiksmus su pinigų srautais, visi jie privalo būti išreikšti tame pačiame laiko momente.

Kaip mes galime tai padaryti? Tą mes pamatysime vėliau. Dabar mes tiesiog galime teigti, kad mums reikia išreikšti vieną arba kelis pinigų srautus vėlesniu laiko momentu (vėliau negu momentu, kuriuo jis yra išreikštas arba kuriame jis atsiranda) ir/arba vieną arba kelis pinigų srautus ankstesniu laiko momentu (anksčiau negu momentu, kuriuo jis yra išreikštas arba kuriame jis atsiranda). Metodai tam atlikti bus aptariami vėliau.

Mūsų suvokimui labiau yra priimtina pirmoji situacija. Mes ją suvokiame lengviau. Jeigu šiandiena padėsime €1.000 indėlį banke, po metų mes tikimės turėti daugiau pinigų. Sakykime €1.050.



Dažniausiai mes jaučiamės mažiau užtikrinti, kai kalbame apie antro tipo situaciją. Įsivaizduokime: prieš kažkiek laiko jūs pasiskolinote pinigų, todėl turite grąžinti €1.050 po metų nuo šiandien. Tarkime, jūs nusprendėte grąžinti skolą šiandien (anksčiau nei buvote sutaręs). Ar turėtumėte grąžinti €1.050? Ar tai teisinga? Galbūt jūs sutarėte, kad grąžinę anksčiau, mokėsite mažiau nei €1.050, tarkime €1.000.



Matote? Tai ir yra pinigų laiko vertė...

1.2 Pagrindiniai kintamieji: pinigai, laikas, palūkanų norma.

Yra trys pagrindiniai kintamieji, kai kalbame apie pinigų srautus. Tiesą sakant mes juos jau minėjome. Tai yra **pinigai**, **laikas** ir **palūkanos** (arba, kaip pamatysime toliau, **palūkanų norma**).

Anksčiau mes jau tiesiogiai minėjome du pirmuosius pagrindinius kintamuosius: pinigus ir laiką. Netiesiogiai mes minėjome ir trečiąjį – palūkanų normą. Kai sakome, kad *€1.000 šiandien gali būti verta €1.050 po metų* mes iš tikrųjų turime omenyje, kad laiko vertė (šiuo atveju vienerių metų vertė) yra €50, t.y. 50/1.000 arba 5% (per metus). Tai ir yra palūkanų norma, kuri dažniausiai būna išreikšta kaip *procentinis dydis* per *metus*. Minėti €50 yra *palūkanos*.

1.3 Palūkanos: kaip ir kodėl.

Dėl kokių priežasčių atsiranda palūkanos? Atrodo priimtina ir teisinga, kuomet pasiskolinę pinigų mes grąžiname pasiskolintą sumą plius dar *kažką*.

Iš tiesų mes naudojame šiuos pinigus (kurie nėra mūsų) tam tikrą laikotarpį. Tai turi kaina. Ta kaina yra palūkanos. Kaip jos gali būti apskaičiuojamos? Galime nesunkiai suprasti, kad palūkanų suma (eurais) priklausys nuo to, *kiek pinigų* mes pasiskolinome, *kokiam laikotarpiui* ir kokia kaina (t.y. palūkanų norma – tarkime 5% per metus).

Taigi, pavyzdžiui jei nusprendėme pasiskolinti €5.000 vieneriems metams ir palūkanų norma yra lygi 5% per metus (arba metinių palūkanų, kaip yra įprasta sakyti), praėjus metams mes privalome sumokėti ne tik €5.000, bet ir

5.000 x 1 x 0,05 = 250 eurus

Tai yra palūkanos.

Nusistatykime keletą simbolių. Tegul

. **I** palūkanos (Eurais, USD ar bet kuria kita valiuta)
. $\mathbf{C_0}$ pinigų suma periodo pradžioje (tarkime, momentu 0, taip pat vadinamu *pradiniu kapitalu, pajamomis, pagrindine suma*, **P** arba *dabartine verte* **PV**)
. **n** laikas (išreikštas metais, ketvirčiais, mėnesiais, dienomis ir t.t.)
. **i** palūkanų norma (dažniausiai išreikšta % per metus)

Galime teigti, kad

$\mathbf{I = C_0 . n . i}$ or $\mathbf{I = PV . n . i}$

Yra privaloma, kad **n** ir **i** būtų išreikšta tais pačiais vienetais. Tarkime, **n** metais ir **i** per metus arba **n** mėnesiais ir **i** per mėnesį. Kuomet vienetai skiriasi, jie turi būti suvienodinti. Panagrinėkime keletą paprastų pavyzdžių.

1 Pavyzdys

C_0 (arba PV) = \$1,000; n = 2 metai; i = 4% (metinės); I = ?

I = 1,000 x 2 x 0.04 = \$80

2 Pavyzdys

C_0 (arba PV) = \$1,000; n = 5 mėnesiai; i = 4% (metinės); I = ?

I = 1 000 x 5/12 x 0.04 = \$16.67

3 Pavyzdys

C_0 (arba PV) = \$1,000; n = 123 dienos; i = 4% (metinės); I = ?

I = 1 000 x 123/365 x 0.04 = \$13.48

Sekančiame skyriuje mes pamatysime, kad yra keletas būdų, kaip skaičiuoti dienas tarp datų.

2. PAPRASTOSIOS IR SUDĖTINĖS PALŪKANOS

2.1 – Paprastosios palūkanos. Palūkanų normos prie paprastųjų palūkanų

Paprastosios palūkanos yra charakterizuojamos tuo faktu, kad bet kuriuo periodu gautos palūkanos nebus naudojamos palūkanoms uždirbti po to sekančiais periodais, t.y. nebus palūkanų ant palūkanų. Palūkanos bet kuriuo periodu yra skaičiuojamos nuo C_0 (PV), taigi jos išliks pastovios bet kuriuo periodu.

4 Pavyzdys

C_0 (PV) = \$1,000; n = 3 metai; i = 12% (metinės)

I_1 = 1,000 x 1 x 0,12 = \$120

Po vienerių metų palūkanos yra \$120, tačiau ši suma nebus pridėta prie pradinės \$1,000 sumos. Antrais metais pinigų suma, kuri gamins palūkanas liks ta pati – \$1,000 (C_0 arba PV).Taigi

I_2 = 1,000 x 1 x 0,12 = \$120

Vėlgi, šie \$120 nebus pridedami prie pradinės sumos. Taigi,

I_3 = 1,000 x 1 x 0,12 = \$120

Trečių metų pabaigoje bendra uždirbtų palūkanų suma I, bus lygi

120 + 120 + 120, i.e., 3 x 120 = \$360.

Bendra pinigų suma bus lygi \$1,360 (1,000 + 360).

Tai dažniausiai vadinama „Sukauptąja Verte“, „Galutine Verte“ arba „Ateities Verte“ (C_n or FV).

Taigi, esant paprastosioms palūkanoms

$C_n = C_0 + I$ (arba FV = PV + I)

ir

$I = C_0\, n\, i$ (arba I = PV n i)

O tai reiškia

$C_n = C_0 + C_0\, n\, i$
$\mathbf{C_n = C_0\,(1+ni)}$

arba

FV = PV + PV n i ⇔ **FV = PV (1+ni)**

Taigi, esant paprastosioms palūkanoms nesvarbu ar turite 12% metines arba 6% pusmetines, arba 3% ketvirtines, arba 1% mėnesines palūkanas, galutinis rezultatas bus tas pats: tarkime, po metų, bendra palūkanų suma yra identiška, nesvarbu ar apskaičiavimui yra naudojama 12% metines palūkanos, 6% pusmetinės palūkanos, 3% ketvirtinės palūkanos ar 1% mėnesinės palūkanos. Tai yra esant paprastosioms palūkanoms sąryšis tarp palūkanų normų, išreikštų skirtingais periodais, yra *proporcingas*: jeigu palūkanų norma yra 12% per metus jos bus

. 6% per pusmetį (1/2 periodo, ½ pirminės palūkanų normos)
. 3% per ketvirtį (1/4 periodo, ¼ pirminės palūkanų normos)
. 1% per mėnesį (1/12 periodo, 1/12 pirminės palūkanų normos)
. ir taip toliau

2.2 – Sudėtinės palūkanos. Palūkanų normos esant sudėtinėms palūkanoms. Metinė nominali palūkanų norma (NOM) ir metinė efektyvi palūkanų norma (EFF)

Sudėtinės palūkanos yra charakterizuojamos tuo faktu, kad bet kuriuo periodu gautos palūkanos bus naudojamos palūkanoms uždirbti po to sekančiais periodais, t.y. palūkanos uždirbs palūkanas. Atkreipkite dėmesį:

$I_1 = C_0 \text{ x } 1 \text{ x } i = C_0 i$
$C_1 = C_0 + I_1 = C_0 + C_0 i = C_0 (1+i)$

$I_2 = C_1 \text{ x } 1 \text{ x } i = C_1 i$
$C_2 = C_1 + I_2 = C_1 + C_1 i = C_1 (1+i) = C_0 (1+i)^2$

$I_3 = C_2 \text{ x } 1 \text{ x } i = C_2 i$
$C_3 = C_2 + I_3 = C_2 + C_2 i = C_2 (1+i) = C_0 (1+i)^3$

Ir taip toliau. Periodo n-tojo pabaigoje mes turėsime
$\mathbf{C_n = C_0 (1+i)^n}$ (arba $\mathbf{FV = PV (1+i)^n}$)

Įsidėmėkite: nuo dabar mes naudosime PV ir FV vietoj C_0 ir C_n.

5 Pavyzdys

PV = $1,000; n = 3 metai; i = 12% (metinės)

I_1 = 1,000 x 1 x 0.12 = $120

Po vienerių metų uždirbtos palūkanos yra lygios $120, kurios yra pridedamos prie pirminės sumos $1,000. Antrais metasi palūkanos bus skaičiuojamos jau nuo $1,120. Taigi

I_2 = 1,120 x 1 x 0.12 = $134.40

Vėlgi, $134.40 yra pridedami prie $1,120, kuriuos mes turėjome antrųjų metų pradžioje. Susumuojame ir gauname $1,254.40. Taigi

I_3 = 1,254.40 x 1 x 0.12 = $150.53
Trečiųjų metų pabaigoje bendra suma bus lygi $1,404.93, o paprastųjų palūkanų atveju, kurį nagrinėjome 4 Pavyzdyje, ji yra lygi $1,360.

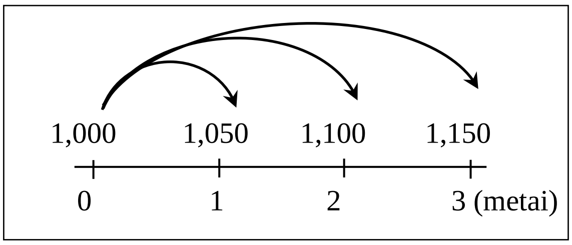
Kaip matome, esant sudėtinėms palūkanoms, periodinės palūkanos (palūkanos uždirbtos bet kuriame periode) nėra pastovios; vietoje to jos didėja, ir didėja *geometrine progresija.*

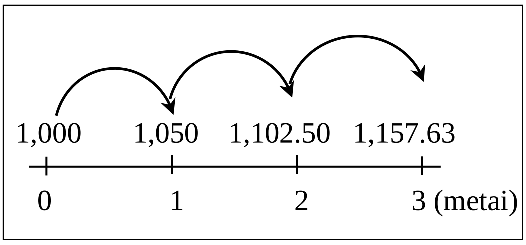
I_1 = PV i
$I_2 = I_1$ (1+i)
$I_3 = I_2$ (1+i) = I_1 $(1+i)^2$
$I_4 = I_3$ (1+i) = I_1 $(1+i)^3$ ir taip toliau

Lengva suprasti, kad esant sudėtinėms palūkanoms, **FV = PV (1+i)^n**, kaip matėme ankščiau.

Vėlgi, yra gyvybiškai svarbu, kad *n* ir *i* yra išreikšti tuo pačiu periodu (t.y. jeigu *i* yra metinis, tai *n* privalo būti išreikštas metais; jeigu *i* yra mėnesinė palūkanų norma, tai *n* privalo būti išreikšta mėnesiais; ir t.t.)

Vizualiai paprastosios palūkanos (pavaizduotos kairėje) ir sudėtinės palūkanos (pavaizduotos dešinėje) elgiasi kaip žemiau pavaizduoti grafikai, esant 5% metinei palūkanų normai ir trijų metų periodui. Ar matote skirtumą?





Kas nutiks jeigu palūkanos bus sumuojamos daugiau nei vieną kartą per metus? Tokiu atveju mums reikia suprasti, ką iš tikrųjų reiškia „12% per metus“. Dabar palūkanos yra uždirbamos iš palūkanų. Taigi

1) Ar „12% per metus“ reiškia, kad palūkanos bus sumuojamos, sakykime, 1% per mėnesį (arba 3% per ketvirtį, 6% per pusmetį)? Jeigu taip, mes turime suprasti, kad pirmų metų pabaigoje mes turėsime daugiu nei 12%, nes palūkanos uždirbs palūkanas.

arba

2) Ar „12% per metus“ reiškia kad, nesvarbu, kiek kartų palūkanos yra sumuojamos per pasirinktą periodą, pirmųjų metų pabaigoje mes uždirbsime 12%? Jei taip, tai reiškia, kad mėnesinės palūkanos negali būti lygios 1%. Jos turi būti mažesnės nei 1% procentas. Jeigu jos būtų lygios 1%, tuomet pirmų metų pabaigoje mes turėtume daug nei 12% dėl palūkanų, uždirbančių palūkanas, sąryšio egzistavimo.

Pirmojoje situacijoje 12% yra *vadinami metine nominalia palūkanų norma* (NOM) ir mes privalome suprasti, kad jeigu mes turime daugiau nei vieną palūkanų sudėjimą per metus, tuomet „efektyvi“ palūkanų norma metams bus didesnė nei 12%. Ir ji bus tuo didesnė, kuo daugiau sudėjimo periodu per vienerius metus mes turėsime.

Antrojoje situacijoje 12% palūkanų norma yra vadinama *metine efektyvia palūkanų norma*, EFF (nesvarbu, kiek sudėjimų mes turime per metus, metų pabaigoje mes uždirbsime 12%). Taigi galime sakyti, kad:

- **EFF** yra metinė norma, kuri atspindi sudėjimo efektą, nesvarbu, kiek sudėjimo periodų mes turime per metus;

- **NOM** yra metinė norma, kuri neatspindi sudėtinių palūkanų efekto (t.y. tarsi būtų naudojamos paprastosios palūkanos)

Nuo šiol laikykime, kad sekantys simboliai reiškia:

i: metinė efektyvi palūkanų norma (EFF)
$i_{(k)}$: metinė nominali palūkanų norma su k sudėjimų per metus (NOM)
i_k: efektyvi palūkanų norma periodui 1/k per metus

Taigi,

i = 12% reiškia, kad nesvarbu, kiek sudėjimų bebūtų per metus, palūkanos atitiks 12% praėjus metams.

$i_{(12)}$ = 12% reiškia, kad palūkanų normos po vienerių metų bus 12%, jeigu nebuvo skaičiuojamos palūkanos nuo palūkanų metų eigoje. Tačiau šiuo atveju yra 12 sudėjimų per metus (k=12), t.y. kas mėnesį. Tai reiškia, kad mėnesinė palūkanų norma yra 1%. Taigi efektyvi palūkanų norma metų pabaigoje bus aukštesnė nei 12%, nes yra 12 sudėjimų per minėtus metus.

i_{12} = 1% reiškia, kad mėnesinė palūkanų norma yra 1%. Palūkanos uždirbamos kas mėnesį. Taigi, metų pabaigoje efektyvi palūkanų norma bus aukštesnė nei 12%.

Turime suprasti, kad esant sudėtinėms palūkanoms, kai mes turime nominalią palūkanų normą, yra absoliučiai svarbu, kad žinotume sudėjimų dažnumą (t.y. kiek sudėjimų mes turime per metus), nes tai apibrėžia metinę efektyvią palūkanų normą.

6 Pavyzdys

Metinė nominali palūkanų norma: 12% sudedama kas pusmetį.

i) Efektyvi palūkanų norma pusmečiui?
ii) Efektyvi palūkanų norma mėnesiui?
iii) Efektyvi palūkanų norma ketvirčiui?
iv) Metinė efektyvi palūkanų norma?

Mes turime $i_{(2)}$ = 12%. Esminė informacija čia yra ta, kad **sudėjimas** įvyksta **kas pusmetį.**

Kodėl tai yra svarbu? Nes

a) Tai yra sudėtinės palūkanos
b) 12% yra metinė norma

Faktas yra tai,

a) Kad jeigu tai būtų paprastosios palūkanos, sudėjimo dažnumas neturėtų prasmės, nes palūkanos nebūtų naudojamos uždirbti palūkanoms.

b) Jeigu palūkanos būtų efektyvios, sudėjimo dažnumas musų nejaudintų; palūkanų normai esant nominaliai, jeigu sudėjimas vyksta bet kuriuo kitu dažnumu, sudėjimo periodas yra gyvybiškai svarbus.

Taigi, tokioje situacijoje (sudėtinės palūkanos ir nominali palūkanų norma) pati svarbiausia dalis yra palūkanų norma tam pačiam sudėjimų periodui, apskaičiuojama pasinaudojant *proporcingumo sąryšiu*. Bet kuri kita palūkanų norma, bet kuriam kitam periodui, turi būti skaičiuojama nuo jo.

Grįžkime prie mūsų pavyzdžio: visų pirma, mes turime suskaičiuoti palūkanų normą pusmečiui, i_2. Kaip? Pasinaudoję *proporcingumo sąryšiu.* Kodėl? Nes 12% yra nominalu. Tai reiškia, kad jeigu palūkanos neuždirbtų palūkanų, palūkanų norma po vienerių metų būtų 12%, t.y. palūkanų norma semestrui yra 6%: $i_2 = 0{,}12 / 2 = 0{,}06$. Tai yra efektyvi palūkanų norma semestrui (klausimas i))

Taigi, kad galėtume apskaičiuoti palūkanų normą bet kuriam kitam periodui, mes privalome turėti omenyje, kad jos turi būti apskaičiuotos taip, kad palūkanos būtų lygios 6% per semestrą. Tai reiškia, kad mėnesinė palūkanų norma negali būti lygi 1%, nes esant sudėtinei palūkanų normai tai būtų lygu daugiau nei 6% kiekvieno semestro pabaigoje. Todėl palūkanų norma mėnesiui turi būti žemesnė nei 1%. Tačiau, kiek tiksliai? Ji turi būti i_{12} taip, kad

$$\underbrace{(1+0{,}06)^1}_{|1\text{ pusmetis}|} = \underbrace{(1+ i_{12})^6}_{|6\text{ mėnesiai}|}$$ *Ekvivalentiškumo sąryšis tarp palūkanų normų*

Įsivaizduokime: mes ieškome metinės palūkanų normos i_{12}, taigi rezultatas yra tas pats, kaip turint vieną sudėjimą, esant 6% po vieno semestro, arba 6 sudėjimus kas mėnesį, esant i_{12}

Atkreipkite dėmesį, kad „1“, kuriuo (1+0,06) yra pakeltas, reiškia „1 semestras“ (nes 6% yra palūkanų norma pusmečiui); „6“ kuriuo pakeltas yra (1+ i_{12}), reiškia „6 mėnesius“ (nes i_{12} yra palūkanų norma mėnesiui). Laiko periodas abiejose lygties pusėse turi būti identiškas (šiame pavyzdyje 1 semestras = 6 mėnesiams)

Taigi, atsakykime į klausimus:

i) $i_2 = 0{,}12/2 = 0{,}06$

ii) $(1+0{,}06)^1 = (1+ i_{12})^6 \Leftrightarrow i_{12} = 0{,}009759$ (pirmojoje lygtyje: 1 pusmetis = 6 mėnesiai)

iii) $(1+0{,}06)^1 = (1+ i_4)^2 \Leftrightarrow i_4 = 0{,}02956$ (pirmojoje lygtyje: 1 pusmetis = 2 ketvirčiai)

iv) $(1+0{,}06)^2 = (1+ i)^1 \Leftrightarrow i = 0{,}1236$ (pirmojoje lygtyje: 2 pusmetis = 1 metai)

2.3 – Dienų skaičiavimo bazė (konvencijos skaičiuojant dienų skaičių tarp datų)

Skaičiuojant palūkanas kas dieną yra priimta naudoti keletą konvencijų, kurios suderina laiko skaičiuojamų verčių laiko vienetus:

- ACT/365
- ACT/360
- 30/360

.„ACT“ reiškia, kad dienos yra skaičiuojamos remiantis faktinėmis kalendoriaus dienomis (realus dienų, esančių tarp abiejų datų, skaičius, atsižvelgiant ar tai yra keliamieji metai ar ne, t.y. 29 ar 28 dienos Vasarį);
. „30“ reiškia, kad yra daroma prielaida, kad kiekvienas mėnuo turi 30 dienų;
. „365“ reiškia, kad daroma prielaida, kad vieneri metai turi 365 dienas;
. “360” reiškia, kad daroma prielaida, kad vieneri metai turi 360 dienų.

Taip pat dažniausiai pirma periodo diena nėra skaičiuojama, o paskutinė priešingai - skaičiuojama.

7 Pavyzdys

€1.000 indėlis padėtas nuo 2016 sausio 20 iki 2016 rugsėjo 14; i = 8%. Kokio dydžio bus palūkanos, darant prielaidą, kad palūkanos yra paprastosios ir

a) ACT/365
b) ACT/360
c) 30/360

(Pažymėtina, kad 2016 yra keliamieji metai)

Dienų skaičiavimas:

	ACT	30
Sausis	11	10
Vasaris	29	30
Kovas	31	30
Balandis	30	30
Gegužė	31	30
Birželis	30	30
Liepa	31	30
Rugpjūtis	31	30
Rugsėjis	14	14
Iš viso:	**238**	**234**

Taigi,

a) ACT/365
I = 1.000 x 238/365 x 0,08 = €52,16

b) ACT/360
I = 1.000 x 238/360 x 0,08 = €52,89

c) 30/360
I = 1,000 x 234/360 x 0,08 = €52,00

PAPILDOMAI: Palūkanų apmokestinimas

Portugalijoje palūkanos yra apmokestintos. Anksčiau jos buvo apmokestintos 20% tarifu, bet 2010 metais valdžia mokesčius pakėlė iki 21,5%, paskui iki 25% ir galiausiai iki 28%. Bankas yra atsakingas už mokesčių nuskaičiavimą ir jų sumokėjimą į iždą investuotojo vardu.

Taigi, yra svarbu iš anksto apibrėžti palūkanų normą, kad būtų aišku ar tai yra palūkanos „prieš mokesčius“, ar palūkanos „po mokesčių“ (arba *net* – grynosios). Taip pat mes turime atkreipti dėmesį į tai ar kas kartą kai palūkanos yra sudedamos bankas nuskaičiuoja mokesčius, ar ne. Jeigu yra naudojamos sudėtinės palūkanos, palūkanų dalis, kuri bus naudojama sudėjimui prie pagrindinės sumos, sekančio periodo palūkanoms skaičiuoti, bus lygi tik „grynosioms palūkanoms“, t.y. palūkanoms po mokesčių (72% prieš mokestinei palūkanų normai)

8 Pavyzdys

Įsivaizduokite, kad norite investuoti €1.000 vieneriems metams. Kurį banką pasirinktumėte?

- Bankas A: metinė nominali palūkanų norma prieš mokesčius 3,765%, sudedama kas mėnesį
- Bankas B: metinė efektyvi palūkanų norma 2,9%; sudedama kas mėnesį

(Apmokestinta: 28%).

Bankas A: turime atkreipti dėmesį į tai, kad pateikta palūkanų norma yra prieš mokesčius ir kad sudėjimas vyksta kas mėnesį. Taigi, mes turime

1. Suskaičiuoti palūkanų normą mėnesiui (proporcingai, nes pateikta nominali palūkanų norma)
2. Suskaičiuoti grynąją palūkanų normą (per mėnesį)

Taigi,

1. Mėnesinė palūkanų norma (prieš mokesčius)
   $i_{12\ pre\text{-}tax} = 0,03765/12 = 0,003138$

2. Grynoji palūkanų norma
   $i_{12\ net} = 0,72 \text{ x } 0,003138 = 0,002259$

Taigi, jei nusprendėme pasirinkti Banką A, po metų uždirbsime

$$FV = 1.000\ (1+0,002259)^{12} = €1.027,452 \approx €1.027,45$$

Bankas B: pateikta palūkanų norma jau yra efektyvi ir gryna. Todėl mums nereikia jaudintis dėl mokesčių ir sukti galvos dėl sudėjimo skaičiaus. Taigi, iškart galime suskaičiuoti FV:

$$FV = 1.000\ (1+0,029)^{1} = €1.029$$

Išvada: Bankas B pateikia šiek tiek geresnį pasiūlymą.

Uždaviniai

Paprastosios palūkanos

2.1 – Aleksandra padėjo \$3,000 indėlį tokiomis sąlygomis: paprastosios palūkanos, metinė palūkanų norma 5%. Kiek palūkanų ji uždirbs po dvejų metų?

(I =\$300)

2.2 – Brigita padėjo \$1,000 indėlį už 6% metines palūkanas (paprastosios palūkanos). Kiek palūkanų ji uždirbs po 4 mėnesių?

(I=\$20)

2.3 – Julius padėjo \$5,000 indėlį, už kurį yra mokamos 4% metinės paprastosios palūkanos. Kiek palūkanų jis uždirbs po 150 dienų, darant prielaidą

i) Įprasti metai (365 days)
ii) Komerciniai metai (360 days)

(i: I=\$82.19; ii: I=\$83.33)

2.4 - Magdalena padėjo €10.000 indėlį už 5% metinių palūkanų nuo 2014 lapkričio 20 d. iki 2015 kovo 20 d. (paprastosios palūkanos). Kiek palūkanų bus uždirbta, jei naudojama konvencija

i) ACT/365
ii) ACT/360
iii) 30/360

(i: I=€164,38; ii: I=€166,67; I=€166,67)

Sudėtinės palūkanos

2.5 – Rugilė padėjo €7.500 indėlį už 12% metinių nominalių palūkanų normą (sudėtinės palūkanos). Kokia bus ateities vertė po vienerių metų, darant prielaidą, kad

i) Kas mėnesinis sudėjimas
ii) Kas ketvirtinis sudėjimas
iii) Metinis sudėjimas

(i: FV=€8.451,19; ii: FV=€8.441,32; iii: FV=€8.400)

2.6 - Agnieszka padėjo \$7,000 indėlį (sudėtinės palūkanos). Po aštuonių ketvirčių ateities vertė yra \$7,715.20. Suskaičiuokite:

i) Metinę nominalią palūkanų normą
ii) Metinę efektyvią palūkanų normą

(i: $i_{(4)}$=4.8938%; ii) i=4.9843%)

2.7 – Magda padėjo \$40,000 indėlį su 5% metine efektyvia palūkanų norma (sudėtinės palūkanos), už kurį gavo \$48,620.25 ateities vertę. Kiek ilgai ji laikė šį indėlį?

(n=4 metus)

Palūkanų normos

2.8 – Metinė efektyvi palūkanų norma: 10%. Efektyvi palūkanų norma

i) Semestrui
ii) Ketvirčiui
ii) Mėnesiui

(i: i_2=4,8809%; ii: i_4=2,4114%; iii: i_{12}=0,7974%)

2.9 - Metinė nominali palūkanų norma: 10%, sudedama kas mėnesį. Metinė efektyvi palūkanų norma?

(i=10,4713%)

2.10 - Efektyvi palūkanų norma ketvirčiui: 3%

i) Metinė nominali palūkanų norma?

ii) Metinė efektyvi palūkanų norma?

(i: $i_{(4)}$=12%; i=12,5509%)

2.11 - Metinė nominali palūkanų norma: 9%; sudedama kas ketvirtį.

i) Efektyvi palūkanų norma mėnesiui?

ii) Efektyvi palūkanų norma pusmečiui?

iii) Efektyvi palūkanų norma ketvirčiui?

iv) Metinė efektyvi palūkanų norma?

(i: i_{12}=0,7444%; i_2=4,5506%; i_4=2,25%; i=9,3083%)

2.12 - Metinė efektyvi palūkanų norma: 9%; sudedama kas ketvirtį.

i) Efektyvi palūkanų norma mėnesiui?

ii) Efektyvi palūkanų norma pusmečiui?

iii) Efektyvi palūkanų norma ketvirčiui?

iv) Metinė efektyvi palūkanų norma?

(i: i_{12}=0,7207%; i_2=4,4031%; i_4=2,1778%; i=9%)

2.13 - Jūs norite investuoti €10.000 vieneriems metams. Kurį banką pasirinksite? (Palūkanos apmokestintos 25% tarifu)

- Bankas A: Metinė nominali palūkanų norma: 4,6%; sudedama kas ketvirtį
- Bankas B: Metinė nominali palūkanų norma prieš mokesčius: 6%; sudedama kas mėnesį
- Bankas C: Metinė efektyvi palūkanų norma: 4,5% sudedama kas mėnesį
- Bankas D: Metinė efektyvi palūkanų norma prieš mokesčius: 6,1%; sudedama kas mėnesį

(Bankas A: €10.468; Bankas B: €10.459,40; Bankas C: €10.450; Bankas D: €10.454,38)*

2.14 - Palūkanų norma: 6% metinės nominalios, sudedamos kas pusmetį. Suskaičiuokite šias palūkanų normas:

i) Efektyvią mėnesiui

ii) Metinę efektyvią

(i: i_{12} = 0,4939%; ii: i = 6,09%)

2.15 - Palūkanų norma: 3%, efektyvi, sudedama kas ketvirtį. Suskaičiuokite šias palūkanų normas:

i) Efektyvią, sudedama kas pusmetį

ii) Efektyvią, sudedama kas mėnesį

iii) Metinę nominalią, sudedama kas ketvirtį

iv) Metinę efektyvią

(i: i_2 = 6,09%; ii: i_{12} = ,9902%; iii: $i_{(4)}$ = 12%; iv: i = 12,5509%)

2.16 - Palūkanų norma: 7%, metinė efektyvi. Suskaičiuokite šias palūkanų normas:

i) Metinę nominalią, sudedama kas ketvirtį

ii) Metinę nominalią, sudedama kas mėnesį

iii) Metinę nominalią, sudedama kas metus

(i: $i_{(4)}$ = 6,8234%; ii: $i_{(12)}$ = 6,785%; iii: i = 7%)

2.17 - Palūkanų norma: 12% metinė nominali prieš mokesčius, sudedama kas mėnesį. Suskaičiuokite metinę efektyvią palūkanų normą po mokesčių (apmokestinta 28% tarifu)

(i_{net} = 8,9905%)

2.18 - Palūkanų norma: 12% metinė efektyvi prieš mokesčius, sudedama kas mėnesį. Suskaičiuokite metinę efektyvią palūkanų normą po mokesčių (apmokestinta 28% tarifu)

(i_{net} = 8,5135%)

3. EKVIVALENTIŠKUMAS TARP PINIGŲ SRAUTŲ

3.1 Ekvivalentiškumas: kaupimas ir diskontavimas prie paprastųjų ir sudėtinių palūkanų.

Remiantis finansų matematikos auksine taisykle (5 puslapis), siekiant teisingai palyginti ir atlikti veiksmus su pinigų srautais, turime juos išreikšti tuo pačiu laiko momentu. Mes jau žinome, kaip išreikšti bet kokią sumą, *dabartinę vertę* (PV), bet kurio vėlesniu metu (prisiminkime, kad šią sumą mes vadiname *ateities verte*, FV). Kaip matėme, esant paprastosioms palūkanų normoms, FV = PV (1+ni); esant sudėtinėms palūkanoms, FV = PV $(1+i)^n$. Bet dažnai pasitaiko situacijų, kuomet reikia išreikšti tam tikrą sumą pinigų ankstesniu momentu vietoje vėlesnio. Kokiu tikslu mums reiktų tą daryti? Ir kaip mums tą reiktų padaryti?

Mums tai gali prireikti padaryti jeigu norėtume sumokėti skolą anksčiau sutarto laiko. Ir kaip mes tą galime padaryti? Teisinga jeigu tokiu atveju mūsų mokamos palūkanos yra mažesnės, nei buvo numatyta pradžioje. Kyla klausimas, kaip apskaičiuoti naują sumą, kurią turime grąžinti? Tam yra bent du būdai: pasinaudojus paprastosiomis palūkanomis arba sudėtinėmis palūkanomis[1].

Šį veiksmą (pinigų srautų išreiškimą ankstesniu momentu) yra priimta vadinti „diskontavimu“ (o pinigų srautų išreiškimą ateityje „kaupimu“)

Būtent pasinaudojant *kaupimu* ir *diskontavimu* ekvivalentiškumas tarp dviejų ar daugiau pinigų srautų, išreikštų skirtingais laiko momentais, gali būti pasiektas. Prisiminkime, kad tai mes turime padaryti dėl pinigų laiko vertės (mes privalome išreikšti kiekvieną pinigų srautą tuo pačiu laiko momentu).

9 Pavyzdys

Skola turi būti sumokėta po dvejų metų. €1.000 įskaitant palūkanas. Palūkanų norma 6% (metinė efektyvi). Kiek skolininkas turėtų sumokėti šiandien, jei nuspręstų grąžinti skolą?

a) Paprastosios palūkanos
b) Sudėtinės palūkanos

Taigi:

a) Esant paprastosioms palūkanoms palūkanas mes skaičiuojame taip:
   I = FV.n. i ; kur PV = FV – I, tada PV = FV – FV.n.i ⇔ **PV = FV (1-ni)** [2]

Šiuo atveju:

I = 1.000 x 2 x 0,06 = €120. Taigi, skolininkas turi sumokėti PV = 1.000 – 120, arba
PV = 1.000 (1 - 2 x 0,06)⇔ PV = €880.

Bet mes turime pastebėti, kad šis požiūris savyje turi rimtą problemą. Palūkanos neturi būti skaičiuojamos nuo 1.000. Tiesą sakant, šie 1.000 eurų *įtraukią* palūkanas, kitos

[1] Iš tiesų tam atlikti yra du būdai esant paprastosioms palūkanoms plius dar du būdai esant sudėtinėms palūkanoms, tačiau mes studijuosime tik po vieną iš jų.

[2] Tai vadinama *Bank (Paprastuoju) Diskontu*. Geriau nei tai, yra taip vadinamas *Tikrasis (Paprastasis) Diskontavimas*, kur I = PV.n.i. Šis būdas yra žymiai tikslesnis. Šiuo atveju, mes turime PV = FV - I ⇔ PV = FV – PV.n.i ⇔ PV = FV / (1+n.i).

(trumpesnės) sumos, už 2 metus, naudojant 6%, kas padaro didžiulį skirtumą. Kaip bebūtų, šis požiūris dažnai yra naudojamas realiame gyvenime[3].

Taigi, jei kreditorius šiandien disponuoja €880 banko sąskaitoje, naudojant paprastąsias palūkanas, to paties dydžio ir tam pačiam periodui, nesunkiai galime suprasti, kad jis ar ji neuždirbs €1.000 po metų. Tiesą sakant
880 (1 + 2 x 0,06) = €985,60 (< €1.000).

b) Naudojant sudėtines palūkanas mes tiesiog atliktume sekantį veiksmą:
PV = FV $(1+i)^{-n}$

Šiuo atveju, PV = 1.000 $(1+0,06)^{-2}$ = €890

Šis metodas (sudėtinių palūkanų) yra daug *tikslesnis*, Tiesą sakant, jeigu kreditorius padeda savo pinigus į banką, taip pat už sudėtines palūkanas, naudojant tą pačią palūkanų normą ir tam pačiam laiko tarpui, jis arba ji uždirbs lygiai €1.000 po vienerių metų (gryna matematika...):

890 $(1+0,06)^2$ = €1.000

Ankstesnysis pavyzdys parodo, koks netobulas yra diskontavimas naudojant paprastąsias palūkanas.

Tiesą sakant, naudojant paprastąsias palūkanas, dėl to kaip palūkanos yra apskaičiuojamos (skaičiuojant FV), gali atsitikti, kad PV=0, kas yra nesąmonė. Tai nutiktų jeigu ni=1. Netgi blogiau, gali nutikti taip, kad PV < 0. Tai atsitiktų jeigu ni>1. Taip niekada neatsitiktų naudojant sudėtines palūkanas.

Taigi, diskontavimas naudojant paprastąsias palūkanas yra priimtinas esant trumpiems periodams ir žemoms palūkanų normoms. Diskontavimas naudojant sudėtinę palūkanų normą, priešingai - nepriklauso nuo kintamųjų dydžio. Metodas visada veda į idealų ekvivalentiškumą ir, nesvarbu, ar periodas yra trumpas ar ilgas, ar palūkanos auštos ar žemos:

10 Pavyzdys

Skolą reikia sumokėti po 5 metų. Dydis $1,000. Palūkanų norma 20%, metinė. Kiek solinkas turi mokėti, jei nusprendžia skolą gražinti šiandien, kai
a) Naudojamos paprastosios palūkanos?
b) Naudojamos sudėtinės palūkanos?

Taigi:

a) Paprastosios palūkanos: : PV = FV (1 - ni) = 1.000 (1 - 5 x 0.20) = $0
Tai yra nesąmonė... Tai atrodytų taip: “Gerai, aš tau skoloje $1,000, kuriuos privalau grąžinti po 5 metų. Aš noriu sumokėti šią skolą dabar. Palūkanų norma yra 20% per metus ir mes naudojame paprastąsias palūkanas. Paskaičiuokime, kiek aš turiu tau grąžinti dabar, jei laikysimės ekvivalentiškumo principo. Ah, nieko! Taigi, mano skola sumokėta. Ate!“
b) Sudėtinės palūkanos: PV = FV $(1 + i)^{-n}$ = 1,000 $(1 + 0.20)^{-5}$ = $401.88
Įsitikinkime, kad tai nėra nesąmonė: šioje situacijoje, kreditorius gaus $401.88. Tai bus idealus ekvivalentiškumas, jeigu jis nuspręs investuoti šią sumą

[3] Portugalijoje mes turime finansinį instrumentą, vadinamą *letra de câmbio,* kaip kasdienį pavyzdį šiai situacijai, su tam tikrais kitais specifiniais aspektais (panašų į *wechsel* Vokietijoje, *weksel* Lenkijoje, *epitagi* Graikijoje ir *kambiyo senetleri* Turkijoje ir vekselį Lietuvoje – tikiuosi, kad neklystu...).

penkeriems metams naudojant 20% metinę palūkanų normą. Jis turėtų atgauti \$1,000. Patikrinkime:
401.88 $(1 + 0{,}20)^5$ = \$1,000. Idealiai!

Taigi: įsivaizduokime, kad vietoje n = 5 metų, mes turime n = 6 metus ir vietoje i = 20%, turime i = 25% (t.y. kad turėtume ilgesnį laiko periodą arba aukštesnes palūkanas). Ar matote, kas nutiks?

Prieš tai nagrinėti pavyzdžiai parodo, kad diskontavimas naudojant paprastąsias palūkanas nėra pas geriausias sprendimas ekvivalentiškumui pasiekti, tuo tarpu diskontuojant naudojantis sudėtinėmis palūkanomis gaunamas idealus rezultatas. Paprastasis diskontavimas visuomet yra labai netikslus, tačiau kaip matėme 10 pavyzdyje, jis gali būti nepriimtinas (kai yra ilgas periodas ir aukštos palūkanos). Tai labai prastas pasirinkimas. Galimas tik esant trumpam terminui ir žemoms palūkanoms. Visiškai kitaip yra diskontavimas naudojant sudėtines palūkanas, tai idealus ekvivalentiškumo sprendimas. Jis visada vedą į idealų ekvivalentiškumą, tiek esant trumpam, tiek ilgam terminui, ir tiek žemoms, tiek aukštoms palūkanoms.

3.2 – Ekvivalentiškumo faktoriai.

Kaip ką tik matėme, kai turime reikalą su pinigais ir mums reikia atlikti veiksmus su pinigų srautais, išreikštais skirtingais laiko momentais, mes turime turėti omenyje, kad pirmas dalykas, kurį turime padaryti – išreikši šiuos pinigų srautus viename laiko momente (tas momentas vadinamas *centrinė data*).

Tai gali pareikalauti tam tikrus pinigų srautus sukaupti, o kitus diskontuoti. Tam tikriems iš jų daryti nieko nereikės. Tai bus situacija, kai šie pinigų srautai jau yra išreikšti centrinėje datoje.

Kaupimas ir diskontavimas gali būti atliekamas naudojant paprastąsias palūkanas bei sudėtines palūkanas. Sudėtinės palūkanos yra daug geresnis ir solidesnis pasirinkimas, taigi, šis metodas yra daug dažniau naudojamas realiame gyvenime.

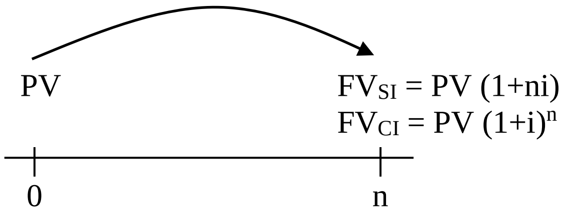
Iki šio momento, mes mokinomės, kaip sukaupti arba diskontuoti **vienetinį** pinigų srautą. Nuo sekančio skyriaus mes mokysimės, kaip tą atlikti keliems pinigų srautams tuo pačiu metu. Kaip pamatysime, jeigu yra išlaikytos dvi sąlygos, skaičiuoti ateities vertę arba dabartinę vertę keliems iš karto (nesvarbu, kiek jų bebūtų), bus labai paprasta.

O kol kas apibendrinkime, kaip sukaupti arba diskontuoti vienetinį pinigų srautą. Kaip matėme,

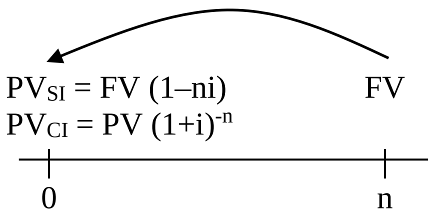
	Ateities vertė	Dabartinė vertė
Paprastosios palūk. (SI)	$FV_{SI} = PV\,(1+ni)$	$PV_{SI} = FV\,(1-ni)$
Sudėtinės palūk. (CI)	$FV_{CI} = PV\,(1+i)^{n}$	$PV_{CI} = FV\,(1+i)^{-n}$

Vizualizuojant,

Kaupti



Diskontuoti



Pastebėkite, kad apskaičiuotume FV, mes tiesiog padauginame PV iš **(1+ni)** arba iš $\mathbf{(1+i)^n}$; apskaičiuojant PV, mes tiesiog padauginame FV iš **(1–ni)** arba $\mathbf{(1+i)^{-n}}$. Tai yra tai ką mes vadiname *ekvivalentiškumo faktoriais*. Tiesą sakant, mums tiesiog reikia *padauginti* PV ir FV iš tinkamo *faktoriaus*, kad gautume *ekvivalentišką* pinigų srautą vėlesniu momentu (FV) ir ankstesniu momentu (PV) atitinkamai. Įsidėmėkite, kad šie faktoriai yra pritaikomi *vienetiniam pinigų srautui*. Jei turime keletą pinigų srautų, mes turime pritaikyti tinkamą faktorių kiekvienam pinigų srautui *atskirai*.

Apibendrinant, mes turime šiuos *ekvivalentiškumo faktorius*[4]:

	Kaupiamasis faktorius (CF)	Diskontavimo faktorius (DF)
Paprastosios palūk. (SI)	$CF_{SI} = (1+ni)$	$DF_{SI} = (1–ni)$
Sudėtinės palūkanos (CI)	$CF_{CI} = (1+i)^n$	$DF_{CI} = (1+i)^{-n}$

Taigi, apibendrinkime mūsų idėjas: kad galėtume sukurti ekvivalentiškumą tarp pinigų srautų, mums reikia sekti šiais žingsniais:

1. Suprasti, tarp kurių pinigų srautų mes norime sukurti ekvivalentiškumą (*klausimas: **ką?***)
2. Nustatyti momentą, kuomet ekvivalentiškumas bus sukurtas, t.y. momentą, į kurį kiekvienas pinigų srautas bus nukeltas (*centrinė data*) (*klausimas: **kada?***)
3. Nustatyti, kaip ekvivalentiškumas bus sukurtas, t.y. naudojant paprastąsias arba sudėtines palūkanas (*klausimas: **kaip?***)

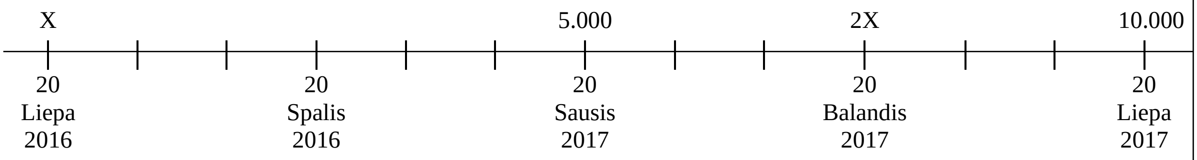
[4] Iš tikrųjų yra ir kitų ekvivalentiškumo faktorių, tačiau jie nėra taip plačiai naudojami, bent jau Portugalijoje.

11 Pavyzdys

Jonas turi sumokėti €5.000 2017 vasario 20 d. plius €10.000 2017 liepos 20 d. . Į šias sumas įskaičiuotos 10% palūkanos (metinės nominalios, sudedamos kas ketvirtį). Jis ketina pakeisti šiuos mokėjimus kitais dviem: €X mokėtiną 2016 liepos 20 d. ir €2X 2017 balandžio 20 d. Kiek jis turi mokėti šiomis dienomis darant prielaidą, kad palūkanos yra tos pačios, naudojama konvencija dienų tarp datų skaičiavimui yra 30/360 ir

a) Paprastosios palūkanos
b) Sudėtinės palūkanos

Pradėkime pavaizduodami situaciją diagramoje:



Mes norime pakeisti tuos du pirminius mokėjimus (€5.000 2017 sausio 20 d. plius €10.000 2017 liepos 20 d.) kitais dviem mokėjimais (€X 2016 liepos 20 d. plius €2X 2017 balandžio 20 d.). Kitaip sakant, mes norime *sukurti ekvivalentiškumą* tarp [5.000 + 10.000] ir [X + 2X].

Kaip mums tai padaryti? Tiesiog atsakykime į tris klausimus apie kuriuos kalbėjome: *ką, kada, kaip.*

1) Ką?

Mes norime pakeisti [5.000+10.000] į [X+2X], t.y. sudaryti ekvivalentiškumą tarp [5.000+10.000] ir [X+2X].

Taigi, galime pradėti rašant šią lygtį, tačiau vis dar neužbaigti:

$$\underset{20\ Sausis\ 2017}{5.000} + \underbrace{10.000}_{20\ Liepa\ 2017} = \underset{20\ Liepa\ 2016}{X} + \underset{20\ Balandis\ 2017}{2X}$$

Kodėl ši lygtis vis dar neužbaigta? Nes dabar nevisi pinigų srautai yra išreikšti tuo pačiu laiko momentu. Tad mums reikia apibrėžti šį momentą (centrinė data). Iš čia kyla antrasis klausimas: **kada?**

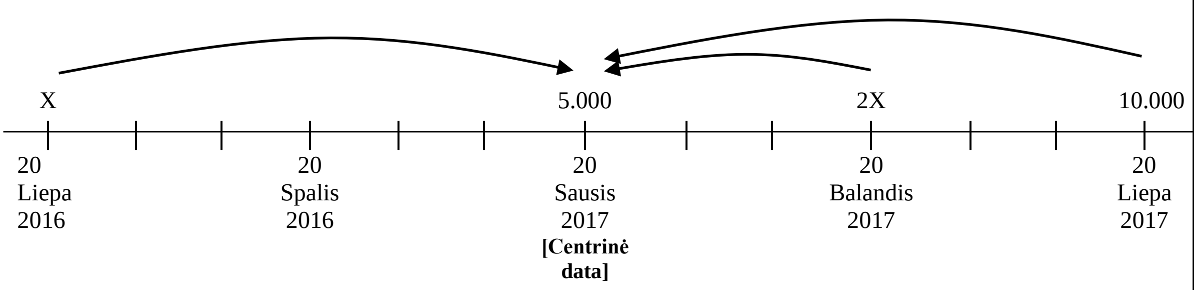
2) Kada?

Mums reikia nustatyti centinę datą, t.y. datą, kuria mes norime išreikšti visus pinigų srautus. Sakykime, kad tai yra 2017 sausio 20 d[5]. Tokiu atveju mums reikia:

- Sukaupti X dviem ketvirčiams
- Nieko nedaryti su 5.000
- Diskontuoti 2X vienam ketvirčiui (arba 3 mėnesiams)
- Diskontuoti 10.000 dviem ketvirčiams (arba 6 mėnesiams)

[5] Svarbus dalykas čia yra tai, kad centrinė data yra nesvarbi esant sudėtinėms palūkanoms, bet gyvybiškai svarbi esant paprastosioms. Kitaip sakant, viena ar kita centrinė data nedaro įtakos ekvivalentiškumui sudėtinių palūkanų atveju (ir tai yra puiku!) Tačiau kas kart pasikeitus centrinei datai prie paprastųjų palūkanų ekvivalentiškumas pasikeičia (tai yra nepriimtina). Tai yra dar viena paprastųjų palūkanų silpnybė ir tuo pačiu dar viena sudėtinių palūkanų stiprybė.

Vizualizuota diagramoje



Kai centrinė data yra apibrėžta, mums reikia sukaupti arba diskontuoti pinigų srautus. Kaip žinome, tą galime padaryti vienu iš dviejų būdų. Štai ir priėjome prie trečiojo klausimo.

3) Kaip?

Klausime a), naudojant paprastąsias palūkanas; klausime b), naudojant sudėtines palūkanas. Dabar galime užbaigti lygtį viršuje tiesiog naudojant teisingus faktorius:

a) Paprastosios palūkanos:

$$\underset{20\ Sausis\ 2017}{5.000} + \underbrace{\underbrace{10.000}_{20\ Liepa\ 2017}\left(1-\frac{6}{12}x0,10\right)}_{20\ Sausis\ 2017} = \underbrace{\underset{20\ Liepa\ 2016}{X}\left(1+\frac{6}{12}x0,10\right)}_{20\ Sausis\ 2017} + \underbrace{\underset{20\ Balandis\ 2017}{2X}\left(1-\frac{3}{12}x0,10\right)}_{20\ Sausis\ 2017}$$

$$5.000+9.500=1,05X+1,95X$$

$$14.500=3X$$

$$X=4.833,33$$

[Kadangi naudojame 30/360 konvenciją, galime manyti, kad kiekvienas mėnuo turi 30 dienų. Kitaip sakant, mes galime naudoti mėnesius, nes kiekviena data yra 20 d. to paties mėnesio].

Taigi, jeigu yra naudojamos paprastosios palūkanos, X = €4.833,33 (mokėtina 2016 liepos 20 d.) ir 2X = €9.666,67 (mokėtina 2017 balanžio 20 d.)

b) Sudėtinės palūkanos:

Šiuo metu yra gyvybiškai svarbu prisiminti, kad palūkanų norma yra 10% metinės nominalios, sumuojamos kas ketvirtį. Taigi, mums reikia suskaičiuoti palūkanas ketvirčiui. Jos yra i_4 = 0,10/4 = 0,025. Taigi

$$\underset{20\ Sausis\ 2017}{5.000} + \underbrace{\underbrace{10.000}_{20\ Liepa\ 2017}(1+0,025)^{-2}}_{20\ Sausis\ 2017} = \underbrace{\underset{20\ Liepa\ 2016}{X}(1+0,025)^{2}}_{20\ Sausis\ 2017} + \underbrace{\underset{20\ Balandis\ 2017}{2X}(1+0,025)^{-1}}_{20\ Sausis\ 2017}$$

$$5.000+9.518,14=1,050625X+1,95122X$$

$$14\ 518,14=3,001845X$$

$$X=4.836,41$$

Taigi, jei naudojamos sudėtinės palūkanos, X = €4.836,41 (mokėtina 2016 liepos 20 d.) ir 2X= €9.672,82 (mokėtina 2017 balandžio 20 d.)

Kaip galite įsivaizduoti, realiame pasaulyje mums gali prireikti sukurti ekvivalentiškumą tarp daugybės (netgi šimtų) pinigų srautų. Tokiose situacijose gali būti labai neefektyvu, jei tą reiktų daryti individualiai, t.y. kiekvienam pinigų srautui atskirai po vieną. Tačiau, jei yra tenkinama viena arba dvi sąlygos, sukurti ekvivalentiškumą tampa labai lengva. Mums pasisekė, kad šios sąlygos realiame pasaulyje yra tenkinamos labai dažnai, o tuo galėsime įsitikinti 4 ir 5 skyriuose.

Uždaviniai

Ekvivalentiškumas tarp pinigų srautų.

3.1 – Dėl šios paskolos po 3 metų nuo šiandien jai reikės sumokėti €10.000. Tačiau Asuman ketina sumokėti paskolą šiandien. Kiek šiandien ji turi sumokėti jeigu:

i) Naudojamos paprastosios palūkanos?
ii) Naudojamos sudėtinės palūkanos?

(i: €7.000 jeigu centrinės datos momentas 0; €7.692,31, jeigu centrinės datos momentas 3; ii: €7.513,15, centrinės datos momentas nesvarbus)

3.2 – Ania turi Karolina atiduoti dvi skolas:

. €3.000 eurų, po 6 mėnesių nuo dabar
. €5.000 eurų, po 10 mėnesių nuo dabar

Ania nori grąžinti abi skolas po 2 mėnesių nuo dabar. Darant prielaidą, kad naudojama 12% metinė efektyvi palūkanų norma, kiek ji turi sumokėti jeigu:

i) Naudojamos paprastosios palūkanos?
ii) Naudojamos sudėtinės palūkanas?

(i: €7.480 jeigu centrinės datos momentas 2; €7.469,39 jeigu centrinės datos momentas 0; €7.500 jeigu centrinės datos momentas 6; €7518,52 jeigu centrinės datos momentas 10; ii: €7.524,94, centrinės datos momentas nesvarbus)

3.3 - Rūta turi Toma sumokėti €25.000 eurų po 4 mėnesių nuo šiandien. Tačiau Rūta ketina sumokėti per dvi dalis: viena dalis bus sumokėta šiandien, o kita po 9 mėnesių nuo dabar. Suma, kurią ketinama sumokėti po 9 mėnesių yra dvigubai didesnė, nei ta, kuri bus sumokėta šiandien. Abi sandorio šalys sutiko su pasiūlymu, naudojant 9% metinę nominalią palūkanų normą, sudedamą kas mėnesį. Kiek turi sumokėti Rūta šiandien ir kiek po 9 mėnesių:

i) Jeigu naudojamos paprastosios palūkanos?
ii) Jeigu naudojamos sudėtinės palūkanos?

(i: €8.460,24 šiandien plius €16.920,48 devyni mėnesiai nuo šiandien jeigu centrinės datos momentas 4; ii: €8.454,52 šiandien plius €16.909,04 devyni mėnesiai nuo šiandien, centinės datos momentas nesvarbus)

3.4 - Taip pat, kaip prieš tai, bet laikykime, kad palūkanų norma yra 9%, nominali metinė, sudedama kas ketvirtį.

(i: €8.460,24 šiandien plius €16.920,48 devyni mėnesiai nuo šiandien, jei centrinės datos momentas 4; ii:€8.453,65 šiandien plius €16.907,30 devyni mėnesiai nuo šiandien, centinės datos momentas nesvarbus)

3.5 - Šiandien firma turi tokias skolas, tam pačiam tiekėjui:

Suma	Data
€12.500	1 mėnuo nuo dabar
€3.500	7 mėnesiai nuo dabar
€8.000	14 mėnesiai nuo dabar

Įmonė ketina sumokėti šias skolas dviem lygiais mokėjimais. Pirmasis bus sumokėtas po 5 mėnesių, o antrasis po vienerių metų. Darant prielaidą, kad naudojamos 6% metinės nominalios palūkanos, sudedamos kas mėnesį, apskaičiuokite šiuos du naujus mokėjimus sekantiems scenarijams:

a) Scenarijus 1: Paprastosios palūkanos; centrinė data: 6 mėnesiai nuo šiandien
b) Scenarijus 2: Paprastosios palūkanos; centrinė data: šiandiena
c) Scenarijus 3: Sudėtinės palūkanos; centrinė data: 6 mėnesiai nuo šiandien
d) Scenarijus 4: Sudėtinės palūkanos; centrinė data: šiandiena

(a: €12.139,24 ; b: €12.143,60; c: €12.141,27; d: €12.141,27)

3.6 - Taip pat, kaip ankstesniame uždavinyje, tačiau manykime, kad palūkanų norma yra 6%, metinė nominali, sudedama kas ketvirtį:

(a: €12.139,24 ; b: €12.143,60; c: €12.140,56; d: €12.140,56)

3.7 – Taip pat, kaip pratime 3.5, tačiau laikykime, kad palūkanos yra 6%, metinės efektyvios.

(a: €12.139,24 ; b: €12.143,60; c: €12.137,44; d: €12.137,44)

4. ANUITETAI

4.1 – Anuiteto apibrėžimas. Svarbios koncepcijos. Anuitetų tipai.

Pažymėtina: *nuo šiol laikysime, kad yra naudojamos sudėtinės palūkanos*

Anuitetas: mokėjimų serija (PMT), dažniausiai to paties dydžio ir atliekama lygiais laiko intervalais (t.y. visuomet tuo pačiu dažnumu).

Anuiteto pavyzdžiai: mokėjimai už gyvenamosios vietos nuomą, būsto paskolos, draudimas, palūkanos mokamos už obligacijas ir t.t.

Yra keletas **svarbių koncepcijų,** į kurias mums reiktų atkreipti dėmesį:

- **Mokėjimo intervalas** arba **anuiteto periodas:** laiko periodas tarp dviejų artimiausių mokėjimų. Tai gali būti bet kokio ilgumo periodas, svarbu, kad jis būtų pastovus – mėnuo, ketvirtis, pusmetis, metai, bet kuris kitas. Tačiau svarbu, kad visuomet vienodas.

- **Anuiteto kilmė**: momentas vieno periodo atstumu prieš momentą, kuomet pirmasis mokėjimas yra atliktas.

- **Anuiteto ateities vertė**: visų mokėjimų vertė, paskutinio mokėjimo metu. Ji yra dažniausiai žymima $\mathbf{FV_A}$ .Taip pat vadinama **akumuliuota anuiteto verte**.

- **Dabartinė anuiteto vertė**: visų mokėjimų vertė, išreikšta anuiteto kilmės metu. Ji yra dažniausiai žymima $\mathbf{PV_A}$. Taip pat vadinama **diskontuota anuiteto verte**.

- **Anuiteto terminas**: bendra anuiteto trukmė.

Mes galime kalbėti apie daugybę anuitetų tipų, skirstomų pagal skirtingus kriterijus. Pavyzdžiui,

Pagal mokėjimo sumas:

- **Pastovūs mokėjimai**: jeigu visi anuiteto mokėjimai yra lygūs (žymima **PMT**).
- **Kintami mokėjimai**: jei nevisi anuiteto mokėjimai yra lygūs.

Pagal anuiteto terminą:

- **Aiškus anuitetas**: kai anuiteto pabaiga yra iš anksto nustatyta (žinoma). Pvz.: obligacijų palūkanų išmokėjimas.
- **Nenumatytas anuitetas**: kai anuitetas priklauso nuo įvykio, kuris neaiškus (nežinomas). Pvz.: draudimas.

Priklausomai nuo momento, kada mokėjimas buvo padarytas

- **Paprastasis anuitetas**: kuomet kiekvienas mokėjimas yra atliekamas periodo intervalo pabaigoje.
- **Pradžios anuitetas**: kuomet kiekvienas mokėjimas yra atliekamas periodo intervalo pradžioje.
- **Atidėtas anuitetas**: kuomet yra atidėjimo periodas, kol pirmasis mokėjimas yra atliekamas.

Priklausomai nuo palūkanų normos periodo ir nuo anuiteto periodo:

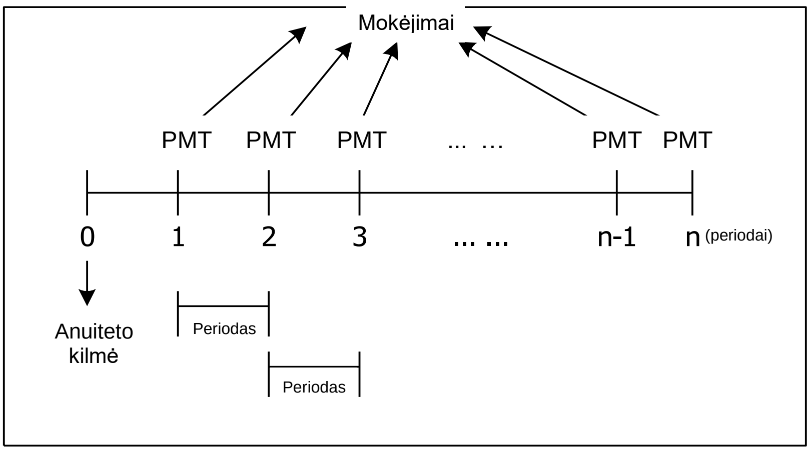
- **Paprastasis anuitetas**: kuomet mokėjimo intervalai ir palūkanų normų periodai sutampa.
- **Bendrasis anuitetas**: kuomet mokėjimo intervalai ir palūkanų normų periodai skiriasi.

Anuitetams mes naudosime toias anotacijas:

- **PMT** (arba tiesiog **p**): periodinis mokėjimas
- **n**: mokėjimų skaičius
- **i**: palūkanų norma, sutampanti su mokėjimo intervalu
- **FV$_A$**: anuiteto ateities vertė
- **PV$_A$**: anuiteto dabartinė vertė

Kol kas laikysime, kad visų anuitetų mokėjimo intervalai yra lygūs bei kad jie sutampa su palūkanų normos periodu. Vėliau (skyriuje 4.5) aptarsime bendrąjį anuitetą, tačiau tik su pastoviais mokėjimais.

Anuitetas gali būti pavaizduotas taip:

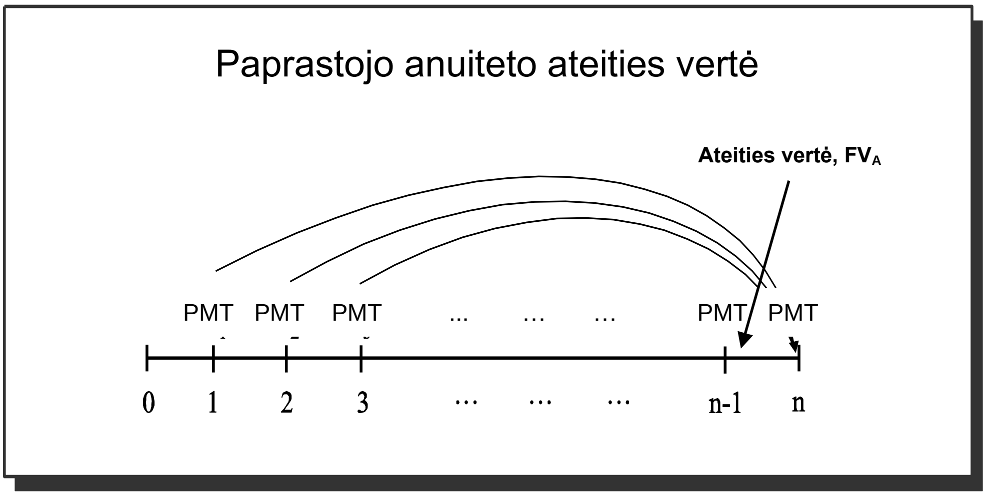


Šiuo atveju mes turime *aiškų, bendrą ir paprastąjį* anuitetą, darant prielaidą, kad mums yra žinomi: mokėjimų skaičius *n*, anuitetas prasideda momente 0, palūkanų periodas sutampa su anuiteto periodu.

Svarbūs pastebėjimai: *tai yra tik simbolinis anuiteto pavaizdavimas. Nėra prievolės, kad pirmasis mokėjimas atsiranda momentu 1, o paskutinis mokėjimas momentu n. Kitaip sakant neprivaloma, kad anuiteto kilmė visada kiltų momente 0, o paskutinis mokėjimas neprivalo visuomet atsirasti momente n.*

4.2 – Paprastojo anuiteto ateities vertė.

Kaip matėme, **anuiteto ateities vertė** yra visų mokėjimų vertė (suma) paskutinio anuiteto mokėjimo momentu. Tai reiškia, kad visi jie turi būti sukaupti tame momente (tiesą sakant nevisiškai visi: paskutinis mokėjimas nėra sukaupiamas, nes jis kaip tik ir atsiranda tuo momentu). Diagramoje,



Analitiškai tai atrodo taip:

$$\underset{Mom.\ n}{FV_A} = \underbrace{\underset{Mom.1}{PMT(1+i)^{n-1}}}_{Mom.\ n} + \underbrace{\underset{Mom.\ 2}{PMT(1+i)^{n-2}}}_{Mom.\ n} + \underbrace{\underset{Mom.\ 3}{PMT(1+i)^{n-3}}}_{Mom.\ n} + ... + \underbrace{\underset{Mom.\ n\text{-}2}{PMT\ (1+i)^{2}}}_{Mom.\ n} + \underbrace{\underset{Mom.\ n\text{-}1}{PMT\ (1+i)^{1}}}_{Mom.\ n} + \underset{Mom.\ n}{PMT}$$

Po šiek tiek matematikos gauname tai:

$$\boxed{FV_A = PMT\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Dažniausiai trupmena aukščiau užrašoma taip $s_{\overline{n}|\,i}$, i.e., $\boxed{s_{\overline{n}|\,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$

Taigi, mes galime rašyti taip $\boxed{FV_A = PMT.s_{\overline{n}|\,i}}$

Yra trys svarbūs pastebėjimai apie šią formulę:

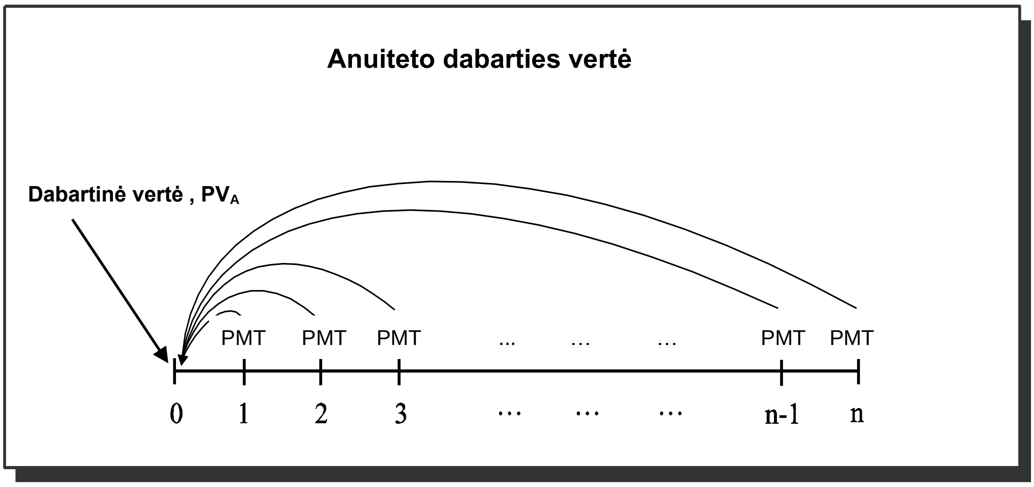
1. **FV$_A$:** yra visų mokėjimų vertė vienu konkrečiu momentu: momentu, kuomet paskutinis mokėjimas yra atliekamas;
2. **n:** yra mokėjimų skaičius (*mokėjimų*, ne *periodų!*)
3. **i:** Yra palūkanų norma teisingai paversta į tą patį periodų skaičių kaip anuiteto.

Ką mums gali reikti apskaičiuoti. Vieną iš šių keturių dalykų:

1. **FVA:** jei tai yra nežinomasis, nekils jokių problemų; jis yra labai lengvai apskaičiuojamas (analitiškai arba naudojant finansinį skaičiuotuvą arba kompiuterinę skaičiuoklę)
2. **PMT:** vėlgi, jei tai yra nežinomasis, nėra jokių problemų jį apskaičiuoti; jis lengvai surandamas bet kuriuo būdu;
3. **n:** jei nežinome mokėjų skaičiaus, galime jį susirasti išsprendus lygtį (naudojant logaritmus) arba naudojant finansų skaičiuotuvą ar kompiuterinę skaičiuoklę. Bet turime įsidėmėti, kad šis skaičius privalo būti sveikas, nes reprezentuoja mokėjimų skaičių. Todėl gali prireikti tam tikrų korekcijų vienam iš mokėjimų. Tai pamatysime analizuodami 14 pavyzdį;
4. **i:** Jeigu tai yra nežinoma, išspręsti analitiniu būdų neįmanoma. Mums reikia finansinio skaičiuotuvo arba kompiuterinės skačiuoklės. Aptarsime tai 15 pavyzdyje.

4.3 – Dabartinė paprastojo anuiteto vertė.

Kaip matėme, **dabartinė anuiteto vertė** yra suma visų mokėjimų <u>anuiteto kilmės momente</u>. Tai reiškia, kad visi jie yra diskontuoti į minėtą momentą (įskaitant ir pirmąjį, nes pagal kilmės koncepciją, jį privaloma diskontuoti per vieną periodą). Diagramoje:



Analitiškai užrašome:

$$\underset{Mom.\ 0}{PV_A} = \underbrace{\overset{Mom.1}{PMT(1+i)^{-1}}}_{Mom.\ 0} + \underbrace{\overset{Mom.\ 2}{PMT(1+i)^{-2}}}_{Mom.\ 0} + \underbrace{\overset{Mom.\ 3}{PMT(1+i)^{-3}}}_{Mom.\ 0} + ... + \underbrace{\overset{Mom.\ n\text{-}2}{PMT\ (1+i)^{-(n-2)}}}_{Mom.\ 0} + \underbrace{\overset{Mom.\ n\text{-}1}{PMT\ (1+i)^{-(n-1)}}}_{Mom.\ 0} + \underbrace{\overset{Mom.\ n}{PMT(1+i)^{-n}}}_{Mom.\ 0}$$

Pasitelkus šiek tiek matematikos gauname:

$$\boxed{PV_A = PMT\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

Priimta viršuje esančią lygtį žymėti $a_{\overline{n|}\,i}$, ie, $\boxed{a_{\overline{n|}\,i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$

Taigi, mes rašome $\boxed{PV_A = PMT.a_{\overline{n|}\,i}}$

Vėlgi, yra trys svarbūs pastebėjimai apie formulę

1. **PV_A:** visų mokėjimų vertė vienu konkrečiu momentu: anuiteto *kilmėje*;
2. **n:** mokėjimų skaičius (*mokėjimų,* ne *periodų!*);
3. **i:** yra palūkanų norma teisingai paversta į tą patį periodą kaip ir anuitetas.

Ką mums gali tekti apskaičiuoti?

1. **PV_A:** jei tai yra nežinomasis, nekils jokių problemų; jis yra labai lengvai apskaičiuojamas (analitiškai arba naudojant finansinį skaičiuotuvą, arba kompiuterinę skaičiuoklę)
2. **PMT:** vėlgi, jei tai yra nežinomasis, nėra jokių problemų jį apskaičiuoti; jis lengvai surandamas bet kuriuo būdu;
3. **n:** jei nežinome mokėjų skaičiaus, galime jį susirasti išsprendus lygtį (naudojant logaritmus) arba naudojant finansų skaičiuotuvą ar kompiuterinę skaičiuoklę. Bet turime įsidėmėti, kad šis skaičius privalo būti sveikasis, nes reprezentuoja mokėjimų skaičių. Todėl gali prireikti tam tikrų korekcijų vienam iš mokėjimų. Tai pamatysime analizuodami 14 pavyzdį;
4. **i:** Jeigu tai yra nežinomasis, išspręsti analitiniu būdų neįmanoma. Mums reikia finansinio skaičiuotuvo arba kompiuterinės skaičiuoklės. Aptarsime tai 15 pavyzdyje.

4.4 – Anuiteto vertė bet kuriuo momentu.

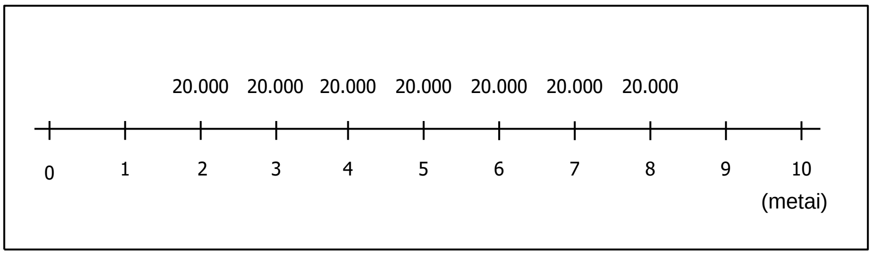
Mes nesunkiai galime suskaičiuoti anuiteto vertę bet kuriuo laiko momentu. Mums reikia prisiminti du dalykus:

1. Kaip nesenai matėme, FV_A ir PV_A yra pinigų kiekiai ekvivalentiški *n* anuiteto mokėjimams dviem specifiniais momentais: momentu, kai įvyksta paskutinis mokėjimas (FV_A) ir momentu, kurį mes vadiname anuiteto *kilme* (PV_A);

2. Mes naudojame sudedamąsias palūkanas; tai leidžia mums nustatyti ekvivalentiškumą bet kuriuo laiko momentu, nes jos idealiai tinka ekvivalentiškumui, kaip mes matėme 2 ir 3 skyriuose. Jeigu teisingai sukaupiame ir diskontuosime FV_A arba PV_A, mes galime rasti kitas ekvivalentiškumo sumas, kitais laiko momentais. Tačiau atkreipkite dėmesį, kad FV_A ir PV_A vienetinės sumos; taigi mes tiesiog dauginame iš $(1+i)^n$ arba iš $(1+i)^{-n}$ kad sukauptume arba diskontuotume jas.

12 Pavyzdys

Suraskite tokio anuiteto vertę nurodytais momentais, darant prielaidą, kad metinė efektyvi palūkanų norma yra 15% (vertė €):



a) Vertė momentu 8
b) Vertė momentu 10
c) Vertė momentu 1
d) Vertė momentu 0
e) Vertė momentu 2
f) Vertė momentu 9
g) Vertė momentu 6

Paaiškinimas

Visų pirma turime suprasti, kad tai yra paprastasis anuitetas (mokėjimo intervalas sutampa su palūkanų normų periodu) su 7 mokėjimais.

a) Momentas 8 yra konkretus momentas: tai momentas kuomet paskutinis mokėjimas yra atliekamas. Todėl yra ypatingai paprasta apskaičiuoti vertę šiuo momentu: jis yra lygus FV_A

$$\mathbf{V_8 = FV_A = 20.000\ s_{\overline{7|}0{,}15} = €221.335{,}98}$$

Ką tai galėtų reikšti tikrame gyvenime?

Pavyzdžiui: jūs nusprendėte sutaupyti šiek tiek pinigų per ateinančius metus. Jei jūs sutaupysite po €20.000 kiekvienais metais, pradedant po dvejų metu (darant prielaidą, kad šiandien yra momentas 0) ir tą darysite septynerius metus (t.y. paskutinis depozitas bus po aštuonerių metų nuo šiandien), o naudojama palūkanų norma bus 15% metinė efektyvi, kokią pinigų sumą turėsite savo banko sąskaitoje tuo konkrečiu metu, t.y. po aštuonerių metų, iškart po septinto pinigų įnešimo (paskutinio depozito)? Atsakymas: €221.335,9.

b) Kad suskaičiuotumėte anuiteto vertę momentu 10 mums tiesiog reikia sukaupti V_8 (FV_A) du metus, iš momento 8 į momentą 10:

$$\mathbf{V_{10} = V_8\,(1+i)^2 = FV_A\,(1+i)^2 = 20.000\ s_{\overline{7|}0{,}15}\,(1+0{,}15)^2}$$

$$\mathbf{V_{10} = 221.335{,}98\,(1+0{,}15)^2 = €292.716{,}84}$$

Pagalvokite: kas tai galėtų būti realiame gyvenime, turint mintyje pavyzdį nagrinėtą klausime a)?

c) Galime sakyti, kad momentas 1 yra išskirtinis: jis yra šio anuiteto kilmės momentas; taigi, mums tiesiog reikia PV_A:

$$\mathbf{V_1 = PV_A = 20.000\ a_{\overline{7|}0{,}15} = €83.208{,}39}$$

Taigi: kokį pavyzdį galime surasti realiame gyvenime?

Kažką panašaus kaip: šiandien (momentu 0) jums reikia sumokėti skolą iš 7 mokėjimų, €20.000 kas metus pradedant po dvejų metų nuo šiandienos. Kiek jums reiktų sumokėti jeigu nuspręstumėte visas jas sumokėti iškart po vienerių metų nuo šiandienos?

d) Apskaičiuoti anuiteto reikšmę momentu 0 mes galima paprasčiausiai diskontuoti V_1 vienais metais nuo momento 1 iki momento 0:

$$\mathbf{V_0 = V_1\,(1+i)^{-1} = PV_A\,(1+i)^{-1} = 20.000\ a_{7\rceil 0,15}\,(1+0,15)^{-1}}$$

$$\mathbf{V_0 = 83.208,39\,(1+0,15)^{-1} = €72.355,13}$$

Pagalvokite: <u>kas tai galėtų būti realiame gyvenime</u>, turint galvoje pavyzdį klausime c)?

Mes taip pat galėtumė diskontuoti V_8 aštuoniais metais, nuo momento 8 iki momento 0:

$$\mathbf{V_0 = V_8\,(1+0,15)^{-8} = 221.335,98\,(1+0,15)^{-8} = €72.355,13}$$

e) Tam, kad apskaičiuotume anuiteto vertę momentu 2 mes galime tieisog pridėti V_1 vienerius metus:

$$\mathbf{V_2 = V_1\,(1+i)^{1} = PV_A\,(1+0,15)^{1} = 20.000\ a_{7\rceil 0,15}\,(1+0,15)^{1}}$$

$$\mathbf{V_2 = 83.208,39\,(1+0,15)^{1} = €95.689,65}$$

Šią reikšmę galėtume apskaičiuoti ir kitais būdais. Pavyzdžiui, diskontuoti V_8 šešeriais metais:

$$\mathbf{V_2 = V_8\,(1+i)^{-6} = FV_A\,(1+i)^{-6} = 221.335,98\,(1+0,15)^{-6}}$$
$$\mathbf{V_2 = €95.689,65}$$

f) Kad apskaičiuotume anuiteto reiškmę momentu 9 mes galime sudėti V_8 vienerius metus:

$$\mathbf{V_9 = V_8\,(1+i)^{1} = 221.335,98\,(1+0,15)^{1} = €254.536,38}$$

Šią reikšmę galime rasti ir kitais būdais. Pavyzdžiui, diskontuojant V_{10} vieneriais metais:

$$\mathbf{V_9 = V_{10}\,(1+i)^{-1} = 292.716,84\,(1+0,15)^{-1} = €254.536,38}$$

g) Anuiteto reikšmę momentu 6 galime rasti keletu būdų. Pavyzdžiui:

$$\underset{\textit{mom. 6}}{\mathbf{V_6}} = \underbrace{\mathbf{20.000s_{5\rceil\,0,15}}}_{\substack{\textit{pirmų 5-ių mokėjimų}\\ \textit{vertė, išreikšta 6-tame}\\ \textit{momente (kai paskutinis}\\ \textit{iš jų atsiranda), t.y.}\\ \textit{anuiteto FV}}} + \underbrace{\mathbf{20.000a_{2\rceil\,0,15}}}_{\substack{\textit{paskutiniųjų dviejų}\\ \textit{mokėjimų vertė,}\\ \textit{išreikšta 6-tame}\\ \textit{momente (šio anuiteto}\\ \textit{pagrindas) t.y. šio}\\ \textit{anuiteto PV}}}$$

$$\mathbf{V_6 = 134.847,63 + 32.514,18 = €167.361,81}$$

Kitas būdas apskaičiuoti V_6:

$$\underset{mom.\,6}{\mathbf{V_6}} = \underbrace{\underbrace{\mathbf{20.000 s_{\overline{4}|\,0,15}}}_{\text{pirmų 4-ių mokėjimų vertė, išreikšta 5-tame momente (kai paskutinis iš jų atsiranda)}} \mathbf{(1+0,15)}}_{\text{pirmų 4-ių mokėjimų vertė, 6-tame momente}} + \underbrace{\mathbf{20.000}}_{\text{5-tojo mokėjimo vertė, kuris atsiranda momente 6-tame (todėl mums nereikia jo nei sudėti, nei diskontuoti)}} + \underbrace{\mathbf{20.000 a_{\overline{2}|\,0,15}}}_{\text{paskutiniųjų dviejų mokėjimų vertė, išreikšta 6-tame momente (šio anuiteto pagrindas)}}$$

$$\mathbf{V_6 = 114.847,63 + 20.000 + 32.514,18 = €167.361,80}$$

Taip pat galime sakyti, kad $V_6 = V_{10}\,(1+0,15)^{-4}$:

$$\mathbf{V_6 = 292.716,84\,(1+0,15)^{-4} = €167.361,80}$$

arba kad $V_6 = V_1\,(1+0,15)^5$:

$$\mathbf{V_6 = 83.208,39\,(1+0,15)^5 = €167.361,79}$$

4.5 – Bendrųjų anuitetų išplėtimas.

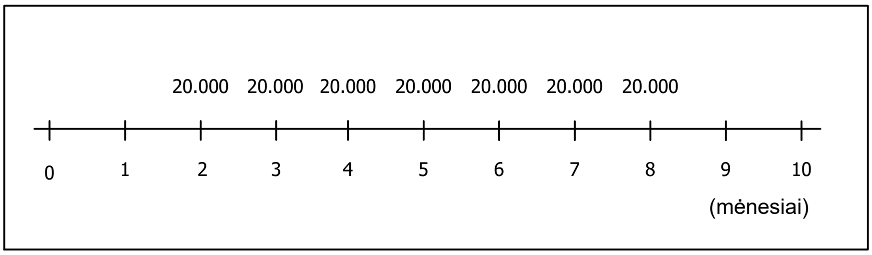
Kaip jau pastebėjome, **bendrasis anuitetas** reiškia, kad mokėjimo intervalas (anuiteto periodas) ir palūkanų normos periodas nėra tas pats. Tai išsprendžiame labai lengvai: tiesiog pradedame skaičiuoti palūkanų normą tam pačiam periodui kaip anuitetui, naudodami proporcinį ir/arba ekvivalentinį santykį taip, kaip paminėta Antrame skyriuje.

Kai tai yra atlikta, turime paprastąjį anuitetą. Nuo šio momento sprendžiame uždavinį taip, kaip anksčiau (logika yra ta pati).

13 Pavyzdys

Raskite anuiteto reikšmę nurodytais laiko momentais, jei palūkanų norma yra 12%

i) Metinė efektyvi
ii) Metinė nominali, skaičiuojama mėnesiui



a) 8 mėn. reikšmė
b) 10 mėn. reikšmė
c) 1 mėn. reikšmė
d) reikšmė 0 taške
e) 2 mėn. reikšmė

Paaiškinimas

Pirmiausia, atkreipkite dėmesį, kad tai yra bendrasis anuitetas (mokėjimo terminas: mėnuo; palūkanų norma: metinė). Yra 7 mokėjimai, pradedant antru mėnesiu ir baigiant aštuntu.

Pirmiausia, ką turime padaryti, tai apskaičiuoti palūkanų normą tam pačiam periodui, kaip anuitetas t.y. mėnesiui, i_{12}.

Klausime *i) palūkanų norma yra:* $i = 0,12$ *(metinė efektyvi).*

Taigi, i_{12} *yra apskaičiuojamas naudojant ekvivalentišką santykį:*

$$(1+i_{12})^{12} = (1+0,12)^{1} \Leftrightarrow i_{12} = 0,009489$$

Nuo čia viskas yra labai panašu kaip ir prieš tai buvusiame pavyzdyje, kur turėjome paprastą anuitetą.

a) *8 mėnuo yra svarbus momentas: tai momentas, kai atsiranda paskutinis mokėjimas. Taigi, yra labai paprasta apskaičiuoti reikšmę tuo momentu: tai yra* FV_A.

$$\mathbf{V_8 = FV_A = 20.000\ s_{\overline{7|}0,009489} = €144.048,92}$$

b) *Tam, kad apskaičiuotume anuiteto reikšmę 10 mėnesį, galime paprasčiausiai sudėti* V_8 (FV_A) *dviems mėnesiams:*

$$\mathbf{V_{10} = V_8\,(1+i_{12})^2 = FV_A\,(1+i_{12})^2 = 20.000\ s_{\overline{7|}0,009489}\,(1+0,009489)^2}$$

$$\mathbf{V_{10} = €146.795,65}$$

c) *Momentas 1 yra svarbus momentas:tai yra šio anuiteto pagrindas; taigi, mums tiesiog reikia* PV_A:

$$\mathbf{V_1 = PV_A = 20.000\ a_{\overline{7|}0,009489} = €134.834,02}$$

d) *Tam, kad apskaičiuotume anuiteto reikšmę momentu 0 galime paprasčiausiai diskontuoti* V_1 *vienu mėnesiu:*

$$\mathbf{V_0 = V_1\,(1+0,009489)^{-1} = PV_A\,(1+i_{12})^{-1}}$$
$$\mathbf{V_0 = 20.000\ a_{\overline{7|}0,009489}\,(1+0,009489)^{-1}}$$
$$\mathbf{V_0 = €133.566,61}$$

Mes taip pat galime, pavyzdžiui, diskontuoti V_8 *aštuoniems mėnesiams:*

$$\mathbf{V_0 = V_8\,(1+0,009489)^{-8} = 144\ 048,92\,(1+0,009489)^{-8}}$$
$$\mathbf{V_0 = €133.566,42}$$

e) *Tam, kad apskaičiuotume anuiteto reikšmę 2 mėnesį, mes galime paprasčiausiai sudėti* V_1 *pirmam mėnesiui:*

$$\mathbf{V_2 = V_1\,(1+i)^1 = PV_A\,(1+0,009489)^{1}}$$
$$\mathbf{V_2 = 20.000\ a_{\overline{7|}0,009489}\,(1+0,009489)^1}$$
$$\mathbf{V_2 = €136.113,46}$$

Klausime ii) palūkanų norma yra $i_{(12)} = 0,12$ (metinė nominalioji, skaičiuojama mėnesiui).
Taigi, i_{12} yra apskaičiuojamas naudojant proporcinį santykį:

$$i_{12} = 0,12/12 = 0,01$$

Nuo čia viskas yra labai panašu, kaip ir prieš tai buvusiuose pavyzdžiuose.

a) *Momentas 8 yra svarbus momentas:*
tai momentas, kai atsiranda paskutinis mokėjimas
Taigi, yra labai lengva apskaičiuoti to momento reikšmę: tai yra FV_A.

$$\mathbf{V_8 = FV_A = 20.000\ s_{\overline{7|}0,01} = €144.270,70}$$

b) *Tam, kad apskaičiuotume anuiteto reikšmę 10 momentu, galime tiesiog skaičiuoti V_8 (FV_A) dviems mėnesiams:*

$$\mathbf{V_{10} = V_8\ (1+i_{12})^2 = FV_A\ (1+i_{12})^2}$$
$$\mathbf{V_{10} = 20.000\ s_{\overline{7|}0,01}\ (1+0,01)^2}$$
$$\mathbf{V_{10} = €147.170,55}$$

c) *Momentas 1 yra šio anuiteto pagrindas;*
taigi, mums tiesiog reikia PV_A:

$$\mathbf{V_1 = PV_A = 20.000\ a_{\overline{7|}0,01} = €134.563,89}$$

d) *Tam, kad apskaičiuotume anuiteto reikšmę momentu 0 mes galime paprasčiausiai diskontuoti V_1 vienu mėnesiu:*

$$\mathbf{V_0 = V_1\ (1+0,01)^{-1} = PV_A\ (1+i_{12})^{-1}}$$
$$\mathbf{V_0 = 20.000\ a_{\overline{7|}0,01}\ (1+0,01)^{-1}}$$
$$\mathbf{V_0 = €133.231,57}$$

Mes taip pat galime, pavyzdžiui, diskontuoti V_8 aštuoniais mėnesiais:

$$\mathbf{V_0 = V_8\ (1+0,01)^{-8} = 144\ 270,70\ (1+0,01)^{-8} = €133.231,57}$$

e) *Tam, kad apskaičiuotume anuitetą momentu 2, mes galime tiesiog skaičiuoti V_1 vienam mėnesiui:*

$$\mathbf{V_2 = V_1\ (1+i)^1 = PV_A\ (1+0,01)^1 = 20.000\ a_{\overline{7|}0,01}\ (1+0,01)}$$
$$\mathbf{V_2 = €135.909,53}$$

Dabar peržvelkime du pavyzdžius, kad išsiaiškintume, kaip spręsti, kai nežinomasis yra *n* ir kai rezultatas nėra sveikasis skaičius (Pavyzdys 14), ir kai nežinomasis yra *i* (Pavyzdys 15).

14 Pavyzdys

Įsivaizduokite, kad galite sutaupyti $150 kiekvieną mėnesį. Kokio dydžio įnašus turite daryti, kad sukauptumėte $10,000 jei palūkanų norma yra 6%, metinė nominalioji?

Paaiškinimas

Pirmiausia, atkreipkite dėmesį, kad mums reikia rasti mėnesinę palūkanų normą, nes anuiteto periodas yra mėnuo.

Tam padaryti, mes naudojame proporcinį santykį, nes palūkanų norma yra nominalioji.

Taigi,

$$i_{12} = 0.06/12 = 0.005$$

Dabar turime

$$FV_A = \$10{,}000$$
$$PMT = \$150$$
$$i_{12} = 0.005$$
$$n = ?$$

Išspręskime:

$$10{,}000 = 150\, s_{\overline{n}|0.005}$$
$$10{,}000 = 150\frac{(1+0.005)^n - 1}{0.005}$$
$$1.333333 = 1.005^n$$
$$\ln 1.333333 = n \ \ln 1.005$$
$$n = 57.6801$$

Išvada: neįmanoma sukaupti lygiai $10,000 su sveikuoju skaičiumi esant mėnesinėms $150 įmokoms, jei palūkanų norma yra 0.5% per mėnesį. Jei atliksime 57 mokėjimus to neužteks; jei atliksime 58 mokėjimus, FV bus didesnis nei $10,000.

Tam, kad sukauptume lygiai $10,000, mes galime, pavyzdžiui,

1. *Atlikti 58 mokėjimus, iš kurių 57 bus po $150 ir paskutinį, kuris tikrai bus mažesnis nei $150 (sakykime, x); arba*

2. *Atlikti 57 mokėjimus, iš kurių 56 bus po $150 ir paskutinį vieną, kuris tikrai bus didesnis nei $150 (sakykime, y).*

Kaip rasti, kiek tiksliai turėtų būti x (situacija 1) arba y (situacija 2)?

Tiesiog sudėliojame teisingą lygtį:

Situacija 1:

$$10{,}000 = 150\, s_{\overline{57}|0.005}\, (1+0.005)^1 + x$$
$$10{,}000 = 150\frac{(1+0.005)^{57} - 1}{0.005}(1+0.005)^1 + x$$
$$x = \$86.14$$

Atkreipkite dėmesį, kad paskutinis (58-tas) mokėjimas x įvyks vienu mėnesiu anksčiau nei paskutinis (57-tas) mokėjimas po $150 ir $10,000 suma bus pasiekta, kai tas mokėjimas x bus atliktas.

Situacija 2: $10{,}000 = 150\, s_{\overline{56}|0.005}\,(1+0.005)^1 + y$

$y = \$285.46$

Atkreipkite dėmesį, kad paskutinis (57-tas) mokėjimas y yra atliekamas vienu mėnesiu po to, kai atliktas paskutinis (56-tas) mokėjimas po $150 ir $10,000 suma pasiekta tiksliai tada, kai tas mokėjimas y yra atliktas.

Kas, jeigu nežinomasis yra palūkanų norma, *i*?

15 Pavyzdys

Įsivaizduokite, kad jums buvo pasiūlytas toks finansinis produktas:
. 48 mėnesius Jūs mokate įmokas po $100 kiekvieną mėnesį;
. Tada, tam tikru momentu (iškart po to, kai atliekate paskutinį mokėjimą) jūs gaunate $5.000
Kokia yra metinė efektyvioji palūkanų norma ?

Paaiškinimas

Pirmiausia, atkreipkite dėmesį, kad turime apskaičiuoti i_{12},t.y. palūkanų normą mėnesiui, nes anuiteto periodas yra mėnuo.
Lygties i_{12} apskaičiavimui yra

$$5{,}000 = 100\, s_{\overline{48}|i12}$$

$$5{,}000 = 100\,\frac{(1+i_{12})^{48} - 1}{i_{12}}$$

To negalime išspręsti analitiškai. Laimei, tai yra labai paprasta išspręsti naudojant finansinius skaičiuotuvus arba skaičiuokle kompiuteryje.
Atsakymas yra
$i_{12} = 0.00172645$, t.y., 0.1726% (per mėnesį). Taigi, metinė efektyvioji palūkanų norma bus I, kaip

$$(1+i)^1 = (1+0.00172645)^{12} \Leftrightarrow i = 0{,}020915$$

4.6 – Perpetuitetai.

Dažniausiai, **Perpetuitetas** apibrėžiamas kaip anuitetas, kuris niekada nesibaigia.
Nors iš tikrųjų tai nėra geras apibrėžimas.
Įmanoma, kad baigtinis anuitetas (t.y. su tiksliu ar net labai mažu mokėjimų skaičiumi) yra perpetuitetas.
Kas iš tikro apibrėžia/nustato ar anuitetas yra perpetuitetas, ar ne,
tai pinigų srautų skaičius (pats vienas);
tai pinigų srautų skaičius **ir** palūkanų norma (kartu).
Palūkanų norma čia vaidina labai svarbų vaidmenį.

Kai kurie perpetuitetų realaus gyvenimo pavyzdžiai gali būti sutinkami akcijų (maržos) vertinime, įmonių vertinime, nuolat labdaringai mokamose stipendijose, draudime ir t.t.

Perpetuitete mes tik norime rasti jo dabartinę vertę, kuri yra baigtinė, nes pinigų srautai, kurie atsiranda tolimoje ateityje nuo dabar, turi labai mažą dabartinę vertę (mažesnę ir vis mažesnę, kai jie atsiranda vėliau ir vėliau, net beveik siekiančią nulį).

Skaičiuoti pertuiteto ateities reikšmę būtų nesąmonė (tai būtų... begalybė).

Kaip galime apskaičiuoti dabartinę anuiteto reikšmę?

Galime manyti, kad n→∞. Taigi, tada tai būtų

$$PV_{A(\infty)} = PMT\,\frac{1-(1+i)^{-\infty}}{i} = PMT\,\frac{1}{i}$$

$$\boxed{PV_{A(\infty)} = \frac{PMT}{i}}$$

Dvi svarbios pastabos apie tai (tiesą sakant, tai nieko naujo; kaip matėme anksčiau, tai jau buvo su anuitetu):

1. Ši dabartinė vertė, $PV_{A(\infty)}$, kaip apskaičiuota, yra perpetuiteto pagrindas; ir

2. Palūkanų norma, i, turi būti nurodyta tam pačiam periodui kaip perpetuitetas.

<u>16 Pavyzdys</u>

Moteris norėtų dovanoti nuolatinę stipendiją geriausiam Vizėjaus Politechnikos Instituto studentui (IPV). Ji norėtų, kad stipendija būtų €1.000 vertės, mokama kiekvienais metais, pradedant po vienerių metų nuo dabar.
Jei palūkanų norma yra 5% (metinė, efektyvioji) kiek ji turėtų paaukoti šiandien, kad jos noras taptų įmanomas?

<u>Paaiškinimas</u>

Mes paprasčiausiai galime sakyti, kad ši dama turėtų paaukoti šiandieninę pertuiteto vertę, o tai reiškia, kad šis dydis turėtų būti:

$$PV_{A(\infty)} = \frac{PMT}{i} = \frac{1.000}{0{,}05} = 20.000$$

Bet pamėginkime suprasti, kas iš tikrųjų vyksta: ši dama padės savo pinigus (€20.000) į banką. Palūkanų norma, kurią bankas moka, yra 5% (metinė, efektyvioji). Taigi, metinės palūkanos yra €1.000.
Vietoj to, kad atgautų šiuos pinigus, ši dama atiduoda pinigus geriausiam IPV studntui kaip stipendiją. Ir tai tęsiasi metai po metų, visada.

Ji niekada neatsiims savo €20.000 iš banko. Iš tikrųjų, tai nieko tokio: su 5% palūkanomis per metus, po 50 metų, turėti €20.000 eurų yra lygiaverčiai €1.744 šiandieną:

$$20.000(1+0{,}05)^{-50} = €1.744$$

Ir po 100 metų nuo dabar tai būtų

$$20.000(1+0{,}05)^{-100} = €152\ldots$$

Atkreipkime dėmesį, kad jei palūkanų norma būtų 10%:

1. *Tai ši dama šiandien turėtų paaukoti tik €10.000* $\left[PV_{A(\infty)} = \frac{1.000}{0{,}10} = €10.000 \right]$*; ir*

2. *Po 50 metų, turėti €10.000 šiandien yra verti tik €85..*

$$10.000(1+0{,}10)^{-50} = €85$$

Uždaviniai

Anuitetai

4.1 – Svarstant šį anuitetą ir manant, kad metinė palūkanų norma yra 10%, apskaičiuokite vertę nurodytais momentais (vertė €):

i) Nulinis momentas
ii) Momentas 5
iii) Momentas 1
iv) Momentas 8

Sugalvokite realaus gyvenimo situaciją, kuri galėtų atitikti kiekvieną iš nurodytų momentų nuo i) iki iv).

		1 000	1 000	1 000	1 000	1 000			
	0	1	2	3	4	5	6	7	8 (metai)

(i: V_0 = €3.790,79; V_5 = €6.105,10; V_1 = €4.169,87; V_8 = €8.125,89)

4.2 – Dabartinė anuiteto vertė su aštuoniolika metinių pastovių ir paprastųjų mokėjimų yra $30,000, kai metinė palūkanų norma yra 12%. Apskaičiuokite mokėjimus. Sugalvokite realaus gyvenimo situaciją, kuri galėtų atitikti šią uždavinio sąlygą.

(PMT = $4,138.12)

4.3 – Ateities anuiteto vertė su metiniais pastoviais, paprastais mokėjimais yra $100,000. Žinant, kad metinė palūkanų norma yra 8% ir kiekvieno mokėjimo vertė yra $3,297.69, apskaičiuokite šio anuiteto mokėjimų skaičių. Sugalvokite realaus gyvenimo situaciją, kuri galėtų atitikti šią uždavino sąlygą.

(n = 16)

4.4 – Dešimt metinių mokėjimo po €10.000 sukuria €158.000 ateities vertę.
Apskaičiuokite metinę palūkanų normą. Sugalvokite realaus gyvenimo situaciją, kuri galėtų atitikti šią uždavino sąlygą.

(i = 9,819%, naudojant finansinį skaičiuotuvą)

4.5 - Agata turi sumokėti atitinkamas sumas kreditoriui:

- penki metiniai mokėjimai po €1.000 kiekvienas;
- tada, penki metiniai mokėjimai po €2.000 kiekvienas.

i) Apskaičiuokite dabartinę šių mokėjimų rinkinio reikšmę, kai metinė palūkanų norma yra 11,5%. Kokia tai galėtų būti situacija realiame gyvenime?

(PV_A = €7.885,67)

ii) Apskaičiuokite ateities šių mokėjimų rinkinio reikšmę, kai metinė palūkanų norma yra 11,5%. Kokia tai galėtų būti situacija realiame gyvenime?

(FV_A = €23.420,02)

4.6 – Apskaičiuokite ateities reikšmę ir dabartinę vertę dešimties metinių mokėjimų po $10.000 kiekvienas, žinant, kad iki ketvirtų metų pabaigos, metinė palūkanų norma yra 9%, o nuo to momento metinė palūkanų norma bus 10%.

(FV_A = $158,171.87; PV_A = $63,250.96)

4.7 – Apskaičiuokite ateities ir dabartinę vertes 44-rių ketvirtinių mokėjimų po €200 kiekvienas, kai:

i) Efektyvioji metinė palūkanų norma yra 9,5%.
ii) Nominalioji metinė palūkanų norma yra 9,5% skaičiuojama ketvirčiams.
iii) Nominalioji metinė palūkanų norma yra 9,5% skaičiuojama kiekvieną semestrą.
iv) Nominalioji metinė palūkanų norma yra 9,5% skaičiuojama mėnesiui.

*(i: FV_A = €14.935,19; PV_A = €5.503,71; ii: FV_A = €15.232,62; PV_A = €5.423,04;
iii: FV_A = €15.129,65; PV_A = €5.450,55; iv: FV_A = €15.303,56; PV_A = €5.404,33)*

4.8 - Jerina atliko šešis metinius įnašus kiekvieną po €5.000, į banką, kuris siūlė 7% metinę efektyviąją palūkanų normą. Tada ji nusprendė atsiimti visus sukauptus pinigus per dešimt vienodų pusmetinių išėmimų. Pirmasis buvo po dvejų metų po šeštojo metinio įnašo (buvo naudojama ta pati efektyvioji metinė palūkanų norma, 7%).
Apskaičiuokite kiekvino pusmetinio išėmimo vertę.

(PMT = €4.745,79)

4.9 – Dagmara ketina pakeisti dešimties metinių mokėjimų po $1,000 kiekvienas anuitetą, kurio pirmasis mokėjimas bus tik po dvejų metų nuo dabar, anuitetu, kurį sudarytų dvidešimt pusmetinių vienodų mokėjimų. Apskaičiuokite kiekvieno pusmetinio mokėjimo vertę, jei efektyvioji palūkanų norma 8.5%.

(PMT = $433.39)

4.10 - Austėja paėmė $100,000 paskolą.
Ši paskola turi būti padengta ketvirtiniais mokėjimais po $5,250 kiekvienas, tiek, kiek įmanoma. Pirmasis mokėjimas turi būti atliktas po vienerių metų. Palūkanų norma yra 12%, metinė nominalioji, skaičiuojama mėnesiui.

i) Įrodykite, kad įmanoma teisingai padengti paskolą vienodais $5,250 mokėjimais.
ii) Pakoreguokite paskutinį mokėjimą x, taip, kad jis būtų mažesnis, bet kiek įmanoma arčiau $5,250, taip, kad paskola būtų tiksliai padengta.
iii) Pakoreguokite paskutinį mokėjimą y, taip, kad jis būtų didesnis, bet kiek įmanoma arčiau $5,250, taip, kad paskola būtų tiksliai padengta.

(i: n = 33,419...; ne sveikasis skaičius, taigi, neįmanoma; ii: x = $2,219.06; iii: y = $7,403.80)

4.11 – Rūrokiai, kurie norėtų mesti rūkyti, gali pamėginti medicininį gydymą, kuris kainuoja €500. Jie gali sumokėti šiuos pinigus per 12 mėnesinių mokėjimų gale mėnesio po €42,93 kiekvienas.

i) Kokia yra metinė efektyvioji palūkanų norma, kurią jie sumoka?
(Pastaba: jei negalite išspręsti, bent jau parašykite teisingą lygtį)

ii) Įsivaizduokime, kad José metė rūkyti. Taigi, jis sutaupys po €95 cigaretėms kiekvieną mėnesį. Be to, jis yra toks laimingas, kad nusprendė sumažinti alaus vartojimą, o tai reiškia, kad jis sutaupys dar po €55 kiekvieną mėnesį. Jei sutaupytus pinigus (€150) jis padėtų į banką kiekvieno mėnesio pabaigoje su 5% palūkanomis (metinėmis, efektyviosiomis), kiek pinigų jis turėtų po dešimties metų?

(i: i = 5,694%; ii: FV_A = €23.154,47)

4.12 – Turtingas ir altruistiškas žmogus ketina paaukoti nuolatinę stipendiją geriausiam Vizėjaus politechnikos instituto (IPV) studentui. Jis nori, kad stipendija būtų €1.000 dydžio, išmokama kiekvieną semestrą, pradedant nuo šiandien. Jei palūkanų norma yra 5,0625% (metinė, efektyvioji) kiek jis turi paaukoti šiandien, kad jo noras taptų įmanomas?

(V_0 = €41.000)

4.13 – Emilia turi atlikti tokius mokėjimus: (€):

100	120	100	100	200	100	100	120	100				
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

(mėnesiai)

Tarkime, kad palūkanų norma yra 10%, metinė, nominalioji, skaičiuojama ketvirčiui ir naudojantis 4 Skyriaus teiginiais jei įmanoma (t.y. ne taip, kaip turėjote daryti trečiame skyriuje, sudedant arba diskontuojant pinigų srautus, vieną paskui kitą)

i) Parašykite lygtis apskaičiuoti visų šių mokėjimų vertę 0 momentu, 12 mėnesį bei apskaičiuokite tas vertes.

(V_0 = €1.006,53)

ii) Sugalvokite ir detaliai apibūdinkite realaus gyvenimo situacijas, kurios galėtų atitikti kiekvieną šių reikšmių.

(V_{12} = €1.105,57)

4.14 – Kompiuterių parduotuvė suteikia savo pirkėjams galimybę apmokėti sąskaitą vienu iš šių trijų būdų:

i) Grynaisiais (t.y. kai jie perka); arba
ii) 30% tuo momentu, kai jie perka, plius 12 mėnesinių vienodų mokėjimų, pradedant po vieno mėnesio; arba
iii) 20% tuo momentu, kai jie perka, plius 4 ketvirtiniai vienodi mokėjimai, pradedant po trijų mėnesių.

Diana ką tik nusipirko kompiuterį, kuris kainuoja $1,000. Kiek ji sumokės kiekvieną mėnesį, jei pasirinks galimybę ii) ir kiek sumokės kiekvieną ketvirtį, jei pasirinks galimybę iii)? Tarkime, kad palūkanų norma yra 16%, metinė efektyvioji.

(PMT = $63.16 per mėnesį arba PMT = $219.25 per ketvirtį)

4.15 – Despoina ketina sutaupyti pinigų kiekvienais metais kol ji surinks $60,000. Ji mano, kad galėtų sutaupyti $5,000 per metus, pradėdama tuoj pat. Bankas mokėtų jai 5% palūkanas, metines efektyviasias. Ar gali Despoina pasiekti savo tikslą esant šioms aplinkybėms? Jei ne, apskaičiuokite paskutinio įnašo, didesnio nei kiti, vertę, bet taip, kad ji būtų atlikusi kiek įmanoma daugiau įnašų po $5,000.

(Deimantė turi atlikti 8 įnašus po $5,000 kiekvieną, plius 9-tą įnašą - $9,867.18)

4.16 – Remkitės ankstesniojo klausimo situacija. Įsivaiduokite, kad Despoina tikrai sutaupė pinigus, kuriuos planavo sutaupyti ($60,000). Tada ji ketina atsiimti pinigus iš banko per 36 mėnesinius vienodus išėmimus, pradedant po 3 mėnesių po paskutinio įnašo, kurį ji atliko. Jei palūkanų norma lieka tokia pati, kiek pinigų ji gaus per mėnesį?

(PMT = $1,809.92)

4.17 – Įsivaizduokite tokią mokėjimų seką (€):

50	50	100	100	150	100	100	200	100	100	150		
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

(mėnesiai)

Tarkime, kad palūkanų norma yra 9%, metinė, nominalioji, skaičiuojama ketvirčiui ir naudodami 4 Skyriaus teiginius kiek įmanoma (t.y. ne taip, kaip turėjote daryti trečiame skyriuje, sudedant arba diskontuojant pinigų srautus, vieną paskui kitą) parašykite lygtis kaip apskaičiuoti šių mokėjimų vertę 0 momentu, 12 mėnesį bei apskaičiuokite tas vertes.

(V_0 = €1.150,51; V_{12} = €1.257,60)

5. PASKOLOS AMORTIZACIJA

5.1 – Pagrindinės koncepcijos ir pagrindiniai kintamieji.

Skola gali būti amortizuota keletu būdų.
Iš tikrųjų vienintelis dalykas, kurio turi būti laikomasi: finansinis ekvivalentiškumas, bet kuriuo momentu, tarp pasiskolinto kiekio (įplaukos, t.y., teigiami srautai iš skolintojo perspektyvos) ir mokamo kiekio (išlaidos t.y. neigiami srauai iš skolintojo perspektyvos).

Vis dėlto, vienos amortizacijos sistemos yra kiek dažniau naudojamos nei kitos. Mes trumpai apžvelgsime dvi iš jų - “Prancūziškąją sistemą” (pastovūs mokėjimai) ir “Itališkąją sistemą” (pastovios amortizacijos arba paskolos dalis).

Visų pirma pristatykime keletą koncepcijų ir kintamųjų.
Šios koncepcijos ir kintamieji bus naudojami nepriklausomai nuo sistemos.

<u>Keletas svarbių koncepcijų ir pastabų</u>:

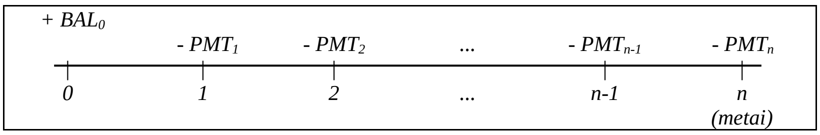
- **Paskolos suma** arba **Pradinė skola (D_0** arba **PV)**: pasiskolintas kiekis.
- **Skola (**arba **balansas)** duotuoju momentu k, arba po duotojo mokėjimo k **(D_k** arba **BAL_k)**: skolos kiekis, kurį vis dar reikia sumokėti duotuoju momentu k, arba po duotojo mokėjimo k;
- **Mokėjimo** numeris k **(p_k** arba **PMT_k)**: dažniausiai apima du dalykus: palūkanos ir amortizacija (arba paskolos dalis). Tiktai paskolos dalis mažina skolą.
- **Palūkanos** įtrauktos į mokėjimą k **(I_k** arba **INT_k)**: dalis mokėjimo apskaičiuota nuo likusios skolos pabaigoje periodo (k-1). Tai nemažina skolos. **$I_k = D_{k-1}.i$ (**arba **$INT_k = BAL_{k-1}.i$)**
- **Amortizacija** arba **paskolos dalis** įtraukta į mokėjimą k **(m_k** arba **PRN_k)**: dalis mokėjimo, kuris atimamas iš skolos.

  $m_k = p_k - I_k$ (arba **$PRN_k = PMT_k - INT_k$)**

  Taigi, **$p_k = m_k + I_k$** (arba **$PMT_k = PRN_k + INT_k$**).

- **Palūkanų norma (i):** turi būti išreikšta tokiu pat periodu kaip mokėjimai t.y., jei mokėjimai turi būti atlikti kas mėnesį, tai reikia naudoti mėnesinę palūkanų normą, teisingai perskaičiuotą (prisiminti 2 Skyriuje)
- **Lengvatinis periodas**: laikotarpis, per kurį skolininkas nemoka paskolos dalies (t.y., jis arba ji moka tik palūkanas) arba iš viso nieko (tokiu atveju, skola bus padidinta sudėtinėmis palūkanomis).

Įsivaizduokime, kad skola bus apmokėta tokiu būdu:



Tai reiškia, kad dabar mes tikime jog mokėjimai bus atliekami kiekvienais metais, pirmasis mokėjimas bus po vienerių metų nuo tada, kai buvo pasiskolinta.
Vėliau atsisakysime šios hipotezės.

5.2 – Amortizacijos grafikas.

Amortizacijos grafikas yra labai dažnai naudojamas įrankis tvarkantis su paskolomis. Jis gali turėti keletą aspektų, bet pagrindinė informacija, kuri sudaro grafiką, yra ši:

AMORTIZACIJOS GRAFIKAS

Periodas k arba **Mokėjimas k**	**Skola laikotarpio k pradžioje (t.y., prieš mokėjimą k) (Balansas)** (**D_{k-1}** or **BAL_{k-1}**)	**Palūkanos mokėjime k (INT_k)**	**Amortizacija (paskolos dalis) mokėjime k** (**m_k** arba **PRN_k**)	**Mokėjimas k** (**p_k** arba **PMT_k**)
1	BAL_0	$INT_1=BAL_0.i$	PRN_1	$PMT_1=INT_1+PRN_1$
2	$BAL_1=BAL_0-PRN_1$	$INT_2=BAL_1.i$	PRN_2	$PMT_2=INT_2+PRN_2$
...	...	...	...	...
n-1	$BAL_{n-2}=BAL_{n-3}-PRN_{n-2}$	$INT_{n-1}=BAL_{n-2}.i$	PRN_{n-1}	$PMT_{n-1}=INT_{n-1}+PRN_{n-1}$
N	$BAL_{n-1}=BAL_{n-2}-PRN_{n-1}$	$INT_n=BAL_{n-1}.i$	PRN_n	$PMT_n=INT_n+PRN_n$

1. Šie du kiekiai turi būti lygūs

$\Sigma\ PRN=BAL_0$

2. Visa amortizacijos suma turi būti lygi paskolos sumai

Dvi pastabos apie amortizacijos grafiką (nepriklausomai nuo amortizacijos sistemos):

1. **$BAL_{n-1} = PRN_n$** (n: bendras mokėjimų skaičius)
   Iš tikrųjų, jei $BAL_{n-1} > PRN_n$, tai reikštų, kad paskola kolkas nebuvo iki galo apmokėta ir jeigu $BAL_{n-1} < PRN_n$, tai reikštų, kad už paskolą buvo sumokėta per daug.

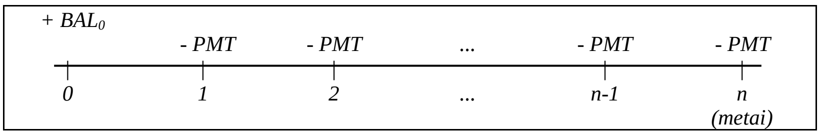
2. **$\Sigma\ PRN = BAL_0$**
   Iš tikrųjų, tiktai amortizacija (PRN_k) apmoka skolą. Taigi, bendra visų amortizacijų suma turi būti lygi paskolos sumai.

5.3 – Dvi sistemos amortizuoti paskolą.

Kaip minėjome prieš tai, skola gali būti amortizuota keletu skirtingų būdų. Toliau panagrinėsime du iš jų.

5.3.1 – Prancūziškoji Sistema (pastovūs mokėjimai)

Šioje amortizavimo sistemoje, visi mokėjimai yra tokios pat vertės. Taigi, tai yra:



Kaip matome, tai yra tas pats kaip anuitetas, 4 Skyriuje. Atkreipkite dėmesį į panašumus tarp BAL_0 ir PV_A. Iš tikrųjų, BAL yra ne kas kita kaip dabartinė visų *n* mokėjimų (PMT) vertė. Taigi, galime sakyti, kad $\boxed{BAL_0 = PMT.a_{\overline{n|}\,i}}$. Iš tikrųjų, kaip matėme 4 Skyriuje, $\boxed{PV_A = PMT.a_{\overline{n|}\,i}}$ (žiūr. psl. 30).

17 Pavyzdys

Žmogus paėmė tokią paskolą:
- Suma: €20.000
- Laikas: 4 metai
- Palūkanų norma: 6%, metinė efektyvioji
- Mokėjimai: pastovūs, metiniai, prasidedantys po vienerių metų nuo tada, kai paskola buvo paimta

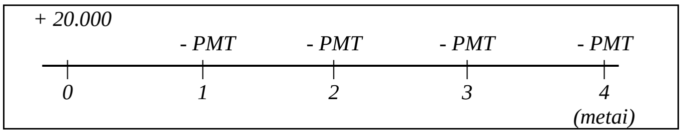
Mes norime:
1. Apskaičiuoti kiekvieno mokėjimo dydį
2. Sudaryti amortizacijos grafiką

Paaiškinimas

1. Štai ką turime:

$BAL_0 = €20.000$
$n = 4$ *(metiniai vienodi mokėjimai)*
$i = 6\%$ *(metinė efektyvioji)*
$PMT = ?$

Skalėje tai atrodytų maždaug taip:



Taigi,

$$\underbrace{20.000}_{\text{paskolos suma (momentu 0)}} = \underbrace{PMT.a_{\overline{4}|\,0,06}}_{\text{4-urių mokėjimų vertė 0-niu momentu}}$$

$PMT = €5.771,83$

2. Amortizacijos grafikas:

Periodas k arba **Mokėjimas k**	**Skola laikotarpio k pradžioje (t.y., prieš mokėjimą k) (Balansas) (D_{k-1} or BAL_{k-1})**	**Palūkanos mokėjime k (INT_k)**	**Amortizacija (paskolos dalis) mokėjime k (m_k arba PRN_k)**	**Mokėjimas k (p_k arba PMT_k)**
1	20.000,00	1.200,00	4.571,83	5.771,83
2	15.428,17	925,69	4.846,14	5.771,83
3	10.582,03	634,92	5.136,91	5.771,83
4	5.445,12	326,71	5.445,12	5.771,83

Amortizacijos grafiko sudarymo paaiškinimas:

1. Apskaičiuokite PMT: $20.000 = PMT.a_{\overline{4}|\,0,06} \Leftrightarrow PMT = €5.771,83$

2. Apskaičiuokite INT_1: $INT_1 = BAL_0.i = 20.000 \times 0,06 = €1.200$

3. Apskaičiuokite PRN_1: $PRN_1 = PMT - INT_1 = 5.771,83 - 1.200 = €4.571,83$

4. Apskaičiuokite $BAL_1 = BAL_0 - PRN_1 = 20.000 - 4.571,83 = €15.428,17$

Ir taip toliau. Atkreipkite dėmesį, kad kaip minėjome 41 puslapyje,

1. $BAL_3 = PRN_4$ *(5.445,12 >> paskutinė Amortizacijos grafiko eilutė); ir*
2. *Visų amortizacijų bendra suma* $\Sigma PRN = BAL_0$.

Yra keletas **įdomių dalykų** apie Prancūziškąją Sistemą, susijusių su

1. Kaip amortizacija auga nuo vieno periodo iki kito (Amortizacijos taisyklė)
2. Pirmoji amortizacija (arba paskolos dalis, PRN_1)
3. Paskutinė amortizacija (arba paskolos dalis, PRN_n)

- **Amortizacijos taisyklė**

Bet kuriuo mokėjimu skolininkas padengia dalį skolos; taigi, kai laikas eina, skola tampa vis mažesnė ir mažesnė; todėl palūkanos kiekviename mokėjime taip pat vis mažės; kadangi mokėjimai lieka pastovūs, amortizacija (paskolos dalis) auga nuo vieno mokėjimo iki kito.
Tai lengva suprasti. Įdomus dalykas tai, kad Prancūziškoje Sistemoje amortizacijos auga tam tikru specifiniu būdu: ji auga geometrine progresija, dauginant iš pastovaus dydžio (1+i). Tai yra,

$$\underset{4.846,14}{PRN_2} = \underbrace{\underset{4.571,83}{PRN_1}\,(1+0,06)}_{4.846,14}\;; \qquad \underset{5.136,91}{PRN_3} = \underbrace{\overbrace{PRN_2}^{4.846,14}\,(1+0,06)}_{5.136,91}\;; \qquad \text{... ir t.t ...}$$

Iš tikrųjų, galime tai įrodyti bet kuriam k $\boxed{PRN_{k+1} = PRN_k\,(1+i)}$.

Taigi,

$$\boxed{PRN_k = PRN_1(1+i)^{k-1}}$$

Bendru atveju,

$$\boxed{PRN_k = PRN_j\,(1+i)^{k-j}}$$

Mūsų pavyzdyje, kaip matėme prieš tai, PRN_1 = 4.571,83. Taigi, pagal amortizacijos taisyklę, galėtume sakyti, pavyzdžiui, kad

$PRN_3 = PRN_1\,(1+i)^2$
$PRN_3 = 4.571,83\,(1+0,06)^2$
$PRN_3 = 5.136,91$ (patikrinkite amortizacijos grafike)

- **Pirmoji amortizacija (paskolos dalis)**

Mes žinome, kad
$BAL_0 = PRN_1 + PRN_2 + ... + PRN_{n-1} + PRN_n$
Ir kad
$PRN_2 = PRN_1\,(1+i)$
$PRN_3 = PRN_2\,(1+i) = PRN_1\,(1+i)^2$
$PRN_4 = PRN_3\,(1+i) = PRN_1\,(1+i)^3$
... ir t.t ...
$PRN_n = PRN_{n-1}\,(1+i) = PRN_1\,(1+i)^{n-1}$
Taigi,
$BAL_0 = PRN_1 + PRN_1(1+i) + PRN_1(1+i)^2 + ... + PRN_1(1+i)^{n-1}$

Tai reiškia, kad BAL_0 yra geometrinės progresijos suma su tokiomis charakteristikomis:

. Pirmoji progresijos vertė (t_1) = PRN_1
. Narių skaičius progresijoje (n) = n
. Dauginimo konstanta (c) = (1+i)

Iš matematikos žinome, kad visų n geometrinės progresijos verčių suma S_{GP}, yra

$$\boxed{S_{GP} = t_1 \frac{c^n - 1}{c - 1}}$$

Taigi, šiuo atveju turime tokį santykį:

Geometrinė Progresija		Prancūziškoji Sistema
S_{GP}	⇔	BAL_0
t_1	⇔	PRN_1
c	⇔	(1+i)
n	⇔	n

Taigi, galime sakyti, kad pagal Prancūziškąją Sistemą

$$BAL_0 = PRN_1 \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$

$$BAL_0 = PRN_1 \underbrace{\frac{(1+i)^n - 1}{i}}_{s_{\overline{n|}\,i}}$$

$$\boxed{BAL_0 = PRN_1 . s_{\overline{n|}\,i}}$$

Arba, tai yra tas pats kaip $\boxed{PRN_1 = \frac{BAL_0}{s_{\overline{n|}\,i}}}$

Mūsų pavyzdyje:

$$PRN_1 = \frac{20.000}{\frac{(1+0,06)^4 - 1}{0,06}}$$

$$PRN_1 = \frac{20.000}{4,374616}$$

$PRN_1 = 4.571,83$ (patikrinkite amortizacijos grafike)

- **Paskutinė amortizacija (paskolos dalis)**

Mes žinome, kad $PMT_n = PRN_n + INT_n$ kas yra tas pats kaip

$$PMT_n = PRN_n + \underbrace{BAL_{n-1}.i}_{INT_n} \qquad \textbf{[1]}$$

Kita vertus, paskutinė amortizacija turi būti lygi skolai prieš tai buvusio periodo pradžioje. Taigi,

$$BAL_{n-1} = PRN_n$$

Pakeičiant į [1], mes gauname

$$\underbrace{PMT_n}_{\substack{\text{paskutinis}\\ \text{mokėjimas}}} = \underbrace{PRN_n}_{\substack{\text{paskutinė}\\ \text{amortizacija}}} + \underbrace{\underbrace{PRN_n}_{\substack{\text{skola paskutinio}\\ \text{periodo pradžioje}}} . i}_{\text{paskutinės palūkanos}}$$

Taigi,

$$\boxed{PMT_n = PRN_n(1+i)}$$

Arba

$$PRN_n = PMT_n(1+i)^{-1}$$

Pagal Prancūziškąją sistemą $PMT_1 = PMT_2 = PMT_3 = ... = PMT_n$. Taigi, galime sakyti, kad

$$\boxed{PRN_n = PMT\,(1+i)^{-1}}$$

Mūsų pavyzdyje mes turime 4 mokėjimus (n=4).
Taigi, PRN_4 = 5.771,83 $(1+0,06)^{-1}$, t.y., PRN_4 = 5.445,12 (patikrinkite amortizacijos grafike).

- **Skola bet kuriuo momentu**

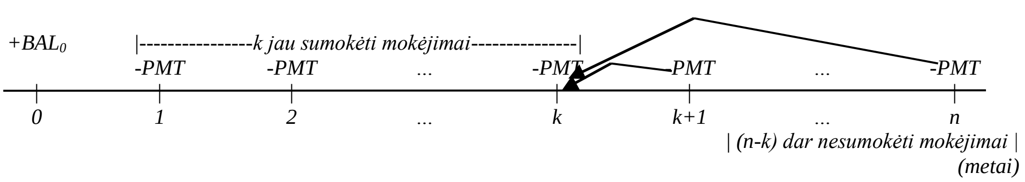
Mes galime apskaičiuoti skolą bet kuriuo momentu dviem būdais:

1. Diskontuojant iki to laiko momento kiekvieną dar nesumokėtą mokėjimą; arba

2. Pridedant iki to momento pradinę skolą, o tada atimant iš šio kiekio sukauptą vertę (tam pačiam momentui) kiekvieno jau sumokėto mokėjimo.

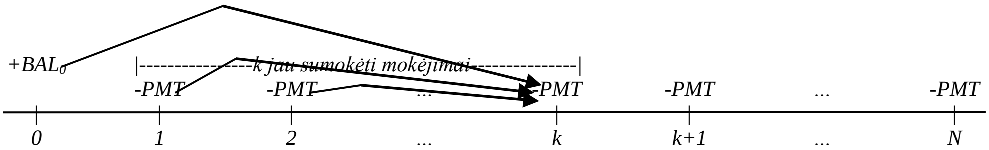
Taigi, tam, kad apskaičiuotume skolą po mokėjimo k, BAL_k, mes galime rinktis vieną iš žemiau pateiktų variantų:

1. Diskontuoti iki to momento kiekvieną dar nesumokėtą mokėjimą (t.y., (n-k) mokėjimai:



Tai yra BAL_k, gautą pagal $BAL_k = PMT.a_{\overline{n-k|}i}$ (dar nesumokėtų (n-k) mokėjimų vertė, momentu k)

2. Pridėti pradinės skolos dydį tam momentui, o tada atimti kiekį visų iki šiol sumokėtų mokėjimų, t.y., k mokėjimai, nurodytų tam momentui:



Tai yra BAL_k, gautą pagal $BAL_k = BAL_0(1+i)^k - PMT.s_{\overline{k|}i}$ (skirtumas tarp

a) Pradinės skolos, apskaičiuotos momentui k; ir

b) Visų jau sumokėtų mokėjimų (k mokėjimai), pridėtų iki momento k

Mūsų pavyzdyje galėtume apskaičiuoti 2 momentu (t.y., iškart po antro mokėjimo) tokiu būdu

1.

$$BAL_2 = \underbrace{5771{,}83\frac{1-(1+0{,}06)^{-2}}{0{,}06}}_{\text{dviejų likusių mokėjimų vertė, momentu 2, t.y., dar nesumokėtų}}$$

$$BAL_2 = 10.582{,}03 \text{ (patikrinkite amortizacijos grafike)}$$

arba tokiu būdu

2.

$$BAL_2 = \underbrace{20.000(1+0{,}06)^2}_{\text{skolos vertė momentu 2 (lyg niekas nebūtų sumokėta iki šiol)}} \underbrace{-5.571{,}83\frac{(1+0{,}06)^2-1}{0{,}06}}_{\text{dviejų jau sumokėtų mokėjimų vertė momentu 2}}$$

$$BAL_2 = 22.472 - 11.889{,}97$$

$$BAL_2 = 10.582{,}03 \text{ (patikrinkite amortizacijos grafike)}$$

Greitai atmesime hipotezes, kurias iki šiol pripažinome: pamatysime, ką daryti jei mokėjimai nėra metiniai ir/arba pirmasis mokėjimas neatsiranda pirmo periodo pabaigoje.

- **Suminės palūkanos**

Kaip galime apskaičiuoti sumines palūkanas tokioje paskoloje? Na, tai paprasčiausiai bus skirtumas tarp visų mokėjimų ir bendros paskolos sumos (arba, kaip jau matėme, Σ PRN). Taigi,

Σ INT = Σ PMT - Σ PRN

Dabar: atmeskime hipotezes, kurias priėmėme iki šiol. Pažiūrėkime, ką daryti jei mokėjimai nėra metiniai ir/arba pirmasis mokėjimas neatsiranda pirmojo laikotarpio pabaigoje.

Ne metiniai mokėjimai (arba, bendriau, mokėjimų dažnis skiriasi nuo palūkanų normos periodo)

Kas jeigu palūkanų normos ir mokėjimų periodai skiriasi? Jokių problemų. Mes tiesiog turime perskaičiuoti palūkanų normą tokiam periodui kaip mokėjimai (prisiminkite, ką matėme 2 Skyriuje, 2.2 dalyje).

<u>18 Pavyzdys</u>

Įsivaizduokite €200.000 paskolą, kuri turi būti apmokėta per 180 mėnesinių ir vienodais mokėjimais, pradedant po vieno mėnesio, kai metinė efektyvioji palūkanų norma yra 14%.
Pavaizduokite pirmas tris ir paskutinę amortizacijos grafiko eilutes.

<u>Paaiškinimas</u>

Štai ką mes turime:

+200.000	-PMT	-PMT	-PMT	...	-PMT	-PMT
0	1	2	3	...	179	180 (mėnesiai)

Mokėjimai yra atliekami kiekvieną mėnesį, bet palūkanų norma yra metinė. Taigi, turime pradėti nuo mėnesinės palūkanų normos apskaičiavimo. Dėl to, kad duotoji norma yra <u>efektyvioji</u>, mes turime naudoti <u>ekvivalentiškumo santykį</u>.

$$(1+i_{12})^{12} = (1+0,14)^{1}$$
$$i_{12} = (1,14)^{1/12} - 1$$
$i_{12} = 0,010979$ *(iš tikrųjų tai yra 0,010978852)*

Taigi,

$$200.000 = PMT.a_{\overline{180|}\ 0,010979}$$
$$200.000 = PMT.\frac{1-1,010979^{-180}}{0,010979}$$
$$200.000 = 78,323628 PMT$$
$$PMT = €2.553,51$$

AMORTIZACIJOS GRAFIKAS

PMT nr	Skola k periodo pradžioje (BAL_{k-1})	Mokėjimo k palūkanos (INT_k)	Amortizacija (paskolos dalis) mokėjime k (PRN_k)	Mokėjimas k (PMT_k)
1	200.000,00	2.195,77	357,74	2.553,51
2	199.642,26	2.191,84	361,67	2.553,51
3	199.280,59	2.187,87	365,64	2.553,51
...	...	...	...	...
180	2.525,78	27,73	2.525,78	2.553,51

<u>Paaiškinimas</u>:

1. *Apskaičiuokite PMT:* $PMT = €2.553,51$ *(kaip ką tik matėme)*
2. *Apskaičiuokite INT_1: $INT_1 = BAL_0.i_{12} = 200.000x0,010979 = €2.195,77$**
   * *Imame $i_{12} = 0,010978852$*
3. *Apskaičiuokite PRN_1: $PRN_1 = PMT – INT_1 = 2.553,51 – 2\ 195,77 = €357,74$*
4. *Apskaičiuokite $BAL_1 = BAL_0 – PRN_1 = 200.000 – 357,74 =€199.642,26$*

Ir taip toliau.

Ir kaip apskaičiuoti paskutinę eilutę neskaičiuojant visų prieš tai esančių reikšmių? Vienas lengvesnių būdų galėtų būti šis:

a) $PRN_{180} = PRN_1 (1+i_{12})^{179}$
$PRN_{180} = 357,74 (1+0,010978852)^{179}$
$PRN_{180} = €2.525,79$

b) $BAL_{179} = PRN_{180}$
$BAL_{179} = €2.525,79$

c) $INT_{180} = BAL_{179} \text{ x } i_{12}$
$INT_{180} = 2.525,79 \text{ x } 0,010978852$
$INT_{180} = €27,73$

d) $PMT_{180} = INT_{180} + PRN_{180}$
$PMT_{180} = 27,73 + 2.525,79$
$PMT_{180} = €2.553,52$

Yra ir kitų būdų apskaičiuoti paskutinėms amortizacijos grafiko eilučių reikšmėms. Ar galėtumėte nurodyti vieną arba du?

Pirmas mokėjimas ne pirmojo periodo pabaigoje

. Prancūziškoji Sistema su lengvatiniu periodu

Kartais būna
an initial periodas, kurio metu skolininkas neamortizuoja skolos. Jis arba ji moka tik palūkanas arba išvis nieko. Tai dažniausiai vadinama “lengvatiniu periodu”.

1. Lengvatinis periodas su palūkanų mokėjimu (k periodų lengvatinis periodas)

$+BAL_0$			Skola: $+BAL_0$			
	- INT	...	- INT	- PMT	...	- PMT
0	1	...	k	k+1	...	k+n

Šioje situacijoje, skola momentu k yra BAL_0, todėl, kad prieš tai buvusiuose perioduose palūkanos buvo mokamos. Taigi, $BAL_0 = PMT.a_{\overline{n|}\,i}$ taip pat kaip prieš tai (vienintelis skirtumas čia tas, kad skolininkas moka palūkanas per lengvatinį periodą).

2. Lengvatinis periodas be palūkanų mokėjimo (k periodų lengvatinis periodas)

$+BAL_0$			Debt: $+BAL_k = BAL_0\,(1+i)^k$			
			↓	- PMT	...	- PMT
0	1	...	k	k+1	...	k+n

Šioje situacijoje skola momentu k yra $BAL_k = BAL_0\ (1+i)^k$, todėl, kad prieš tai buvusiuose perioduose niekas nebuvo mokama. Nuo momento k iki pabaigos, mes turime n mokėjimų. Taigi, $BAL_0\left(1+i\right)^k = PMT.a_{\overline{n|}\,i}$.

19 Pavyzdys

Įsivaizduokite $50,000 paskolą, kuri turi būti apmokėta per 20 ketvirtinių ir vienodų mokėjimų, po vienerių metų lengvatinio periodo, su 8% metine nominaliąja palūkanų norma, skaičiuojama ketvirčiui.

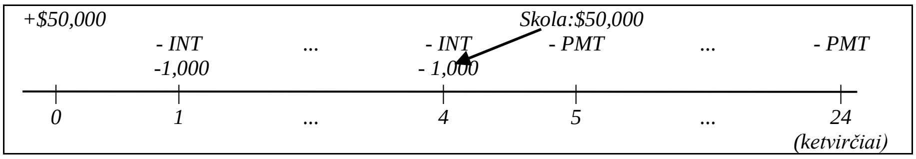
a) Manoma, kad per lengvatinį periodą skolininkas moka palūkanas kiekvieną ketvirtį. Kiek jis ar ji sumokės kas ketvirtį per pirmus metus ir po to?

b) Manoma, kad skolininkas per lengvatinį periodą nieko nemoka. Kiek jis ar ji sumokės po to?

<u>Paaiškinimas</u>

a) Šioje situacijoje, per pirmus metus skolininkas mokės tik palūkanas, t.y.

$INT = 50{,}000 \times 0.02 = \$1{,}000$ $\quad (i_4 = 0.08/4 = 0.02)$



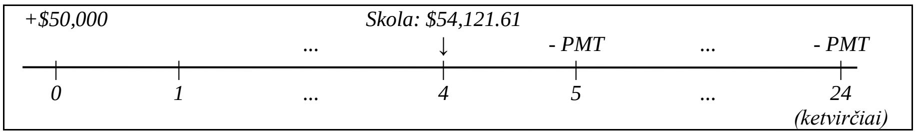
Pirmų metų pabaigoje skola vis dar bus $50,000. Taigi, tam, kad apskaičiuotume kiekvieno mokėjimo reikšmę nuo to momento, mes turėtume:

$$50{,}000 = PMT.a_{\overline{20|}\,0.02}$$

$$50{,}000 = PMT.\frac{1-(1+0.02)^{-20}}{0.02}$$

$$PMT = \$3{,}057.84$$

b) Šioje situacijoje, pirmų metų pabaigoje skola bus $50,000 $(1+0.02)^4$ = $54,121,61. skalėje tai būtų



Taigi, kiekvieno mokėjimo nuo momento 5 iki 24 vertė bus lygi žemiau esančios lygties rezultatui:

$$54{,}121.61 = PMT.a_{\overline{20|}\,0.02}$$

$$54{,}121.61 = PMT.\frac{1-(1+0.02)^{-20}}{0.02}$$

$$PMT = \$3{,}309.90$$

Lizingas

Lizingas, galima sakyti, yra specialus Prancūziškosios Sistemos atvejis.

Visada yra paskutinis mokėjimas (FP) ir gali atsitikti, kad yra ir pradinis mokėjimas (IP), kuris skiriasi nuo visų kitų mokėjimų. Tai neturėtų sukelti jokių sunkumų. Viskas, ką turime turėti omeny, kaip visada, kad ekvivalentiškumas turi išlikti. Apžvelkime keletą situacijų:

1. Nėra pradinio mokėjimo; *n* paprastų, vienodų anuitetų (PMT) plius galutinis mokėjimas (FP)

$+BAL_0$					$-FP$
	$-PMT$	$-PMT$	...	$-PMT$	$-PMT$
0	1	2	...	n-1	n

Atitinkama lygtis yra

$$\boxed{BAL_0 = PMT.a_{\overline{n|}\,i} + FP(1+i)^{-n}}$$

2. Nėra pradinio mokėjimo; *n* pastovių anuiteto įmokų (p) plius galutinis mokėjimas (FP)

$+BAL_0$					$-FP$
$-PMT$	$-PMT$	$-PMT$	...	$-PMT$	
0	1	2	...	n-1	n

Atitinkama lygtis yra

$$\boxed{BAL_0 = PMT.a_{\overline{n|}\,i}(1+i) + FP(1+i)^{-n}} \text{ or } \boxed{BAL_0 = PMT + PMT.a_{\overline{n-1|}\,i} + FP(1+i)^{-n}}$$

3. Pradinis mokėjimas (IP), plius *(n-1)* paprastų, vienodų anuitetų (PMT) ir galutinis mokėjimas (FP)

$+BAL_0$					$-FP$
$-IP$	$-PMT$	$-PMT$	...	$-PMT$	
0	1	2	...	n-1	n

Atitinkama lygtis yra

$$\boxed{D_0 = IP + p.a_{\overline{n-1|}\,i} + FP(1+i)^{-n}}$$

20 Pavyzdys

Įsivaizduokite lizingą taip:
- Paskola: €20.000
- Laikas: 4 metai
- Palūkanų norma: 6%, metinė nominalioji, skaičiuojama mėnesiui
- Galutinis mokėjimas: 2% nuo paskolos

Apskaičiuokite mokėjimus šiems scenarijams:

1) Nėra pradinio mokėjimo; 48 paprasti anuiteto mokėjiai plius galutinis mokėjimas
2) Nėra pradinio mokėjimo; 48 anuiteto mokėjimai plius galutinis mokėjimas
3) Pradinis mokėjimas: 20% skolos; 47 paprasti anuiteto mokėjimai plius galutinis

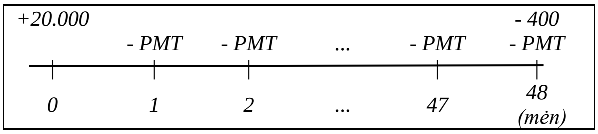
<u>*Paaiškinimas*</u>

Turime pradėti nuo mėnesinės palūkanų normos apskaičiavimo. Tai yra

$$i_{12} = \frac{0,06}{12} = 0,005\,.$$

Be to, galutinis mokėjimas yra €400 (20.000 x 0,02).

1. Štai ką turime:

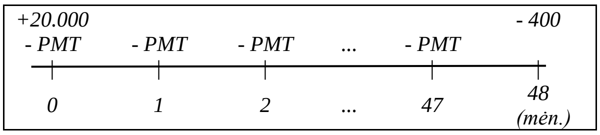


Taigi,

$$\underbrace{20.000}_{\text{skola (mom. 0)}} = \underbrace{PMT.a_{\overline{48|}\,0,005}}_{\substack{\text{48-ių mokėjimų vertė}\\ \text{momentu 0 (pagrindas)}}} \underbrace{+400\left(1+0,005\right)^{-48}}_{\substack{\text{paskutinio mokėjimų}\\ \text{vertė momentu 0}}}$$

PMT = €462,31

2. Dabar turime tai:

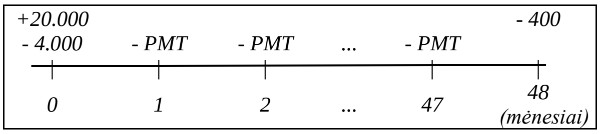


Taigi,

$$\underbrace{20.000}_{\text{skola (mom. 0)}} = \underbrace{\underbrace{PMT.a_{\overline{48|}\,0,005}}_{\substack{\text{48-ių mokėjimų}\\ \text{vertė momentu -1}\\ \text{(pagrindas)}}}(1+0,005)^{1}}_{\text{vertė 0-liniu momentu}} + \underbrace{400\left(1+0,005\right)^{-48}}_{\substack{\text{paskutinio mokėjimo}\\ \text{vertė momentu 0}}}$$

PMT = €460,01

3. Galiausiai, turime štai ką:



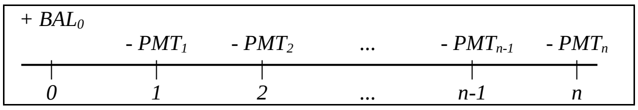
Taigi,

$20.000 = 4.000 + PMT.\ a_{\overline{47|}0,005} + 400\ (1,005)^{-48}$

PMT = €375,30

5.3.2 – Itališkoji Sistema (pastovi amortizacija)

Pagal šią sistemą, kaip nurodo pats pavadinimas, nebe *mokėjimas* (PMT) bet *amortizacija* (paskolos dalis, PRN) yra pastovi. Turime



Dabar mokėjimai nebėra pastovūs, nes pastovi yra amortizacija ir palūkanos vis mažės nuo vieno mokėjimo iki kito.

Kiekviena amortizacija bus $PRN = \frac{BAL_0}{n}$.

- Skola bet kuriuo momentu

Šioje sistemoje skola bet kuriuo momentu BAL_k yra paprasčiausiai apskaičiuojama dauginant PRN iš dar nesumokėtų mokėjimų skaičiaus, (n-k):

$$\boxed{BAL_k = (n-k).PRN}$$

- Palūkanos ir mokėjimas laike

Nuo vieno periodo iki kito tiek palūkanos, tiek mokėjimai mažėja per *PRN.i*. Iš tikrųjų mes amortizuojame *PRN* kiekviename mokėjime; taigi, kitame mokėjime mes sumokėsime *PRN.i* mažiau palūkanų (ir, žinoma, paties mokėjimo, nes *PRN* yra pastovus).

Tai reiškia, kad tiek palūkanos, tiek ir mokėjimai seka aritmetine progresija laike, pastovus *–PRN.i* ("minus" *PRN.i*).

- Suminės palūkanos

Turint galvoje, kas ką tik buvo pasakyta, suminės palūkanos yra visų aritmetinės progresijos narių suma. Iš matematikos žinome, kad ši suma yra

$$S_{AP} = n\frac{t_1 + t_n}{2}$$

kur

S_{AP}: progresijos n narių (reikšmių) suma
t_1: pirmas progresijos narys
t_n: paskutinis progresijos narys
n: progresijos narių skaičius

taigi, Itališkoje Sistemoje

$$suminės\ palūkanos = n\frac{INT_1 + INT_n}{2}$$

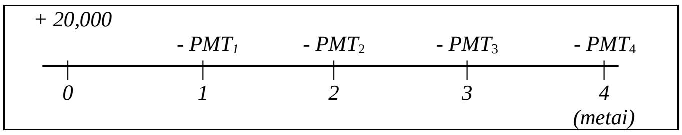
<u>21 Pavyzdys</u>

Žmogus paėmė tokią paskolą:
- Suma: $20,000
- Laikas: 4 metai
- Palūkanų norma: 6%, metinė efektyvioji
- Mokėjimai: metiniai, pradedant po vienerių metų, kai paskola buvo paimta, kai paskolos dalis yra pastovi

Sudarykite amortizacijos grafiką..

<u>Paaiškinimas</u>

Turime suprasti, kad nuo šiol mokėjimai nebus pastovūs. Kaip žinome, jie susideda iš palūkanų ir amortizacijos. Šiuo atveju, tiktai amortizacija (paskolos dalis) yra pastovi. Taigi, štai ką turime:



Mes lengvai galime apskaičiuoti amortizaciją pateiktą kiekviename mokėjime, PRN. Iš tikrųjų,

$$PRN = \frac{BAL_0}{n} = \frac{20,000}{4} = 5,000$$

Sudarykime amortizacijos grafiką::

PMT nr	Skola periodo k pradžioje (BAL_{k-1})	Palūkanos mokėjime k (INT_k)	Amortizacija (paskolos dalis) mokėjime k (PRN_k)	Mokėjimas k (PMT_k)
1	20,000.00	1,200.00	5,000.00	6,200.00
2	15,000.00	900.00	5,000.00	5,900.00
3	10,000.00	600.00	5,000.00	5,600.00
4	5,000.00	300.00	5,000.00	5,300.00

Paaiškinimas:

1. *Apskaičiuokit PRN:* $PRN = \frac{BAL_0}{n} = \frac{20,000}{4} \Leftrightarrow PRN = \$5,000$
2. *Apskaičiuokite* INT_1: $INT_1 = BAL_0 . i = 20,000 \times 0.06 = \$1,200$
3. *Apskaičiuokite* PMT_1: $PMT_1 = PRN + INT_1 = 5,000 + 1,200 = \$6,200$
4. *Apskaičiuokite* $BAL_1 = BAL_0 - PRN = 20,000 - 5,000 = \$15,000$

Ir taip toliau.

Atkreipkite dėmesį, kad:

1. $BAL_3 = PRN$ *(5,000.00 >> paskutinė amortizacijos grafiko eilutė); ir*
2. *Visų amortizacijų suma* $= n.PRN = 4 \times 5,000.00 = BAL_0$

Kaip matėme, tai nutinka visada, nepriklausomai nu amortizacijos sistemos (psl 45).

Uždaviniai

Skolos amortizacija

5.1 – Tristan paėmė €120.000 paskolą, kurią turi apmokėti per 6 metinius, pastovius ir paprastus mokėjimus. Metinė palūkanų norma yra 7% (efektyvioji).

i) Kiek jis sumokės kiekvienais metais?
ii) Apskaičiuokite amortizaciją pirmame, ketvirtame ir paskutiniame mokėjime
iii) Apskaičiuokite skolą po ketvirtojo mokėjimo
iv) Apskaičiuokite palūkanas penktame mokėjime
v) Apskaičiuokite sumines palūkanas

(i: PMT = €25.175,50; ii: PRN_1 = €16.775,50; PRN_4 = €20.550,70; PRN_6 = €23.528,50; iii: BAL_4 = €45.517,75; iv: INT_5 = €3.186,24; v: suminės palūkanos = €31.052,97)

5.2 – Įsivaiduokite prieš tai buvusią paskolą, bet su dvejų metų lengvatiniu periodu ir tada šešis metinius, pastovius mokėjimus. Atsakykite į tuos pačius klausimus, bet darant prielaidą jog

a) Per lengvatinį periodą skolininkas moka palūkanas pirmųjų ir antrųjų metų pabaigoje
b) Per lengvatinį periodą skolininkas nieko nemoka

(Klausimas a) i: PMT = €25.175,50; ii: PRN_1 = €16.775,50; PRN_4 = €20.550,70; PRN_6 = €23.528,50; iii: BAL_4 = €45.517,75; iv: INT_5 = €3.186,24; v: suminės palūkanos = €47.852,97)
(Klausimas b) i: PMT = €28.823,43; ii: PRN_1 = €19.206,27; PRN_4 = €23 528,50; PRN_6 = €26.937,78; iii: BAL_4 = €52.113,28; iv: INT_5 = €3.647,93; v: suminės palūkanos = €52.940,58)

5.3 – Christina ką tik sutarė dėl lizingo:

. Skola: $25.000
. Laikas: 4 metai
. Mėnesiniai mokėjimai
. Palūkanų norma: 6% (metinė, nominalioji, skaičiuojama mėnesiui)
. Galutinis mokėjimas: 4% nuo sutarties sumos

Taip, kaip mokėtės prieš tai, apskaičiuokite situacijas 1, 2 ir 3
(Pastaba: 3 situacijoje tarkime, kad Pradinis Mokėjimas yra 10% nuo paskolos sumos):

i) Mokėjimą
ii) Skolos sumą pirmųjų metų pabaigoje
iii) Palūkanas ir amortizaciją 13- tame mokėjime
iv) Naują mokėjimą, jeigu palūkanų norma keičiasi iki 7,2% pirmųjų metų pabaigoje

(1 Situacija) i: PMT = \$568.64; ii: BAL_{12} = \$19,527.44; iii: INT_{13} = \$97.64; PRN_{13} = \$471.00; iv: PMT' = \$579.77)
(2 Situacija) i: PMT = \$565.81; ii: BAL_{13} = \$18,961.58; iii: INT_{13} = \$97.15; PRN_{13} = \$468.66; iv: PMT' = \$576.64)
(3 Situacija) i: PMT = \$519.53; ii: BAL_{12} = \$17,479.04; iii: INT_{13} = \$87.40; PRN_{13} = \$432.13; iv: PMT' = \$529.56)

5.4 – Çagla paėmė tokią paskolą:

. €100.000
. 5 metams
. Ketvirtiniai paprasti mokėjimai
. Palūkanų norma: 8,2432% (metinė efektyvioji)
. Itališkoji Sistema

Apskaičiuokite:

i) Amortizaciją 10-tame mokėjime
ii) Skolą po 8-ojo mokėjimo
iii) Palūkanas 9-tajame mokėjime
iv) Sumines palūkanas

(i: PRN = €5.000; ii: BAL_8 = €60.000; iii: INT_9 = €1.200; iv: suminės palūkanos = €21.000)

6. INVESTAVIMO VERTINIMO PAGRINDAI.

6.1 Materialus investavimas ir finansinis investavimas.

Materialus investavimas: investavimas į pastatus, mašinas ir t.t..; finansinis investavimas: investavimas į vertybinius popierius (akcijas), obligacijas, t.t...

6.2 Materialaus investavimo įvertinimas.

Kai apskaičiuoti pinigų srautai, susiję su investicija, galime panaudoti ankstesnes pinigų laiko vertės koncepcijas tam, kad įvertintume investavimo galimybes. Sunkiausias darbas yra nuspėti tuos pinigų srautus. Įvertinti juos yra lengva. Tam yra du „klasikiniai“ indikatoriai: NPV (Grynoji dabarties vertė) ir IRR (Vidinė pelno norma).

. **NPV** yra dabartinė vertė visų pinigų srautų, susijusių su investicija, suma (teigiamų minus neigiamų). Jei NPV>0, tai investicija yra „įdomi”; jei NPV<0, tai investicija yra “neįdomi”.

. **IRR** tai norma, naudojama diskontuojant kiekvieną pinigų srautą, vedanti prie NPV=0, kas teoriškai yra “indiferentiškumo taškas”, kuris rodo investuoti ar ne.

<u>22 Pavyzdys</u>

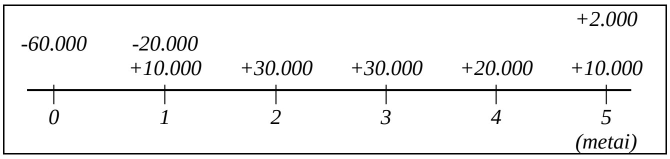
Tarkime, kad po sudėtingo tyrimo, mes tikimės jog mūsų investicija generuos tokius pinigų srautus (€):

Metai	*Investicija*	*Pinigų srautai*
0	*- 60.000*	
1	*- 20.000*	*10.000*
2		*30.000*
3		*30.000*
4		*20.000*
5		*10.000*

Mes taip pat tikime, kad ši investicija sugeneruos galutinę €2.000 įplauką 5-ųjų metų pabaigoje.
Žinant jog palūkanų norma yra 12% (metinė) kaip įvertinti šią investiciją, ką turėtume nuspręsti?

<u>Paaiškinimas</u>

Štai ką turime:



Tam, kad įvertintume invsticiją, turėtume apskaičiuoti jos NPV (Grynoji Dabartinė vertė):

$$\underbrace{NPV}_{Mom.\,0} = \underbrace{-60.000}_{Mom.\,0} + \underbrace{\underbrace{(10.000-20.000)}_{Mom.\,1}(1+0,12)^{-1}}_{Mom.\,0} + \underbrace{\underbrace{30.000}_{Mom.\,2}(1+0,12)^{-2}}_{Mom.\,0} +$$

$$+\underbrace{\underbrace{30.000}_{Mom.\,3}(1+0,12)^{-3}}_{Mom.\,0} + \underbrace{\underbrace{20.000}_{Mom.\,4}(1+0,12)^{-4}}_{Mom.\,0} + \underbrace{\underbrace{(10.000+2.000)}_{Mom.\,5}(1+0,12)^{-5}}_{Mom.\,0}$$

$$NPV = € -4.139,86$$

Taigi, investicija atrodo neįdomi (NPV<0).

Tokios pat išvados gali būti gautos naudojant IRR:

$$0 = -60.000 + (10.000-20.000)(1+IRR)^{-1} + 30.000(1+IRR)^{-2} +$$

$$+30.000(1+IRR)^{-3} + 20.000(1+IRR)^{-4} + (10.000+2.000)(1+IRR)^{-5}$$

IRR vertė lengvai gaunama naudojant finansinį skaičiuotuvą arba kompiuterinę skaičiuoklę. Šiuo atveju, IRR = 9,6% (apytiksliai). Esant mažiau nei 12%,grąža yra mažesnė, nei tikėtasi, todėl investicija „neįdomi“.

6.3 Finansinių investicijų įvertinimas

Vertybiniai popieriai (akcijos) yra kompanijos kapitalas. Akcininkai, galima sakyti, yra kompanijos savininkai. Jie tikisi dviejų tipų pelno: iš dividendų, kol jie turi akcijas ir iš pačių akcijų, jas parduodant. Bet, žinoma, abu yra neaiškūs. Dividendai gali arba gali būti ir neišmokėti akcininkams ir net jeigu jie ir yra mokami, jų dydis yra neaiškus. Ir, žinoma, niekas tiksliai negali pasakyti, kad akcijų kaina ateityje bus didesnė, kai akcininkai nuspręs jas parduoti. Taigi, tai yra rizikingas turtas (investavimas).

Obligacijos yra skolos instrumentas, per kurį įmonės ir Vyriausybės gali skolintis pinigus.
Yra daugybė obligacijų rūšių. Mes apžvelgsime tik vieną obligacijų tipą: Fiksuotų atkarpų iždo obligacijos (Treasury Constant Coupon Bonds). Tai reiškia, kad jos yra labai mažos rizikos turtas, todėl, kad skolininkas yra Vyriausybė ir todėl, kad palūkanų norma (“lakštai”) yra patovi. Iš tiesų, dažniausiai tai laikoma turtu be rizikos. Grąža, kurią investuotojai tikisi uždirbti yra palūkanos. Palūkanos (arba *lakštai*) yra skaičiuojamos nuo *nominalios* obligacijų *vertės*. Obligacijų gyvavimo pabaigoje (*terminas*) investuotojas taip pat gauna *išpirkimo vertę* (dažniausiai, lygią nominaliajai vertei).

<u>23 Pavyzdys</u>

Įsivaizduokime tai apie ABC akcijas:
. Šiandienos kaina: \$39.20
. Numatomi dividendai:
. pirmų metų pabaigoje: \$1.20
. antrų metų pabaigoje: \$1.00
. trečių metų pabaigoje: \$1.00
. Numatoma akcijų kaina trečių metų pabaigoje: \$45.00
Sprendžiant pagal duotus duomenis, kiek įdomi yra investicija į šias akcijas?

Paaiškinimas

Štai ką turime:

- 39.20			+ 45.00
	+1.20	+1.00	+1.00
0	1	2	3 (metai)

Taigi, galime apskaičiuoti metinę grąžą r,spręsdami šią lygtį:

$39.20 = 1.20(1+r)^{-1} + 1.00(1+r)^{-2} + 46.00(1+r)^{-3}$

r=7.3% (apskaičiuota finansiniu skaičiuotuvu arba kompiuteriu).

Ar investicija įdomi? Tai priklauso nuo dviejų dalykų:

1. *Palūkanų normos rinkoje, turtas su panašia rizika. Jei galime rasti kitokio turto su panašia rizika, kuris duotų didesnę grąžą, ši investicija neatrodytų įdomi;*

2. *Investuotojo rizikos priėmimo profilio. Jei investuotojas turi aukštą rizikos netoleravimą, galbūt jis arba ji šią grąžą įvertins kaip per mažą, kad kompensuotų patiriamą riziką.*

24 Pavyzdys

Įsivaizduokit tai apie Iždo Obligacijas:
. Kaina (šiandien): $52.37
. Nominali vertė: $50.00
. Išpirkimo vertė: $50.00
. Lakšto norma: 12% (metinė)
. Terminas: 5 metai
. grąža, kurios tikisi investuotojas: 10%
Ar turėtų investuotojas pirkti šias obligacijas?

Paaiškinimas

Pažiūrėkime: jei investuotojas pirks šias obligacijas jis arba ji sumokės (šiandien) $52.37 už obligacijas ir gaus $6.00 kiekvienais metais (palūkanos = $50.00 x 0.12) plius $50.00 kai sueina terminas (išpirkimo vertė). Taigi,

-52.37					+50.00
	+6.00	+6.00	+6.00	+6.00	+6.00
0	1	2	3	4	5 (metai)

Taigi, šiandien šios obligacijos yra vertos investavimo

$$\underset{Mom.\ 0}{vert\dot{e}} = \underbrace{6.00a_{\overline{5}|0.10}}_{Mom.\ 0} + \underbrace{\underset{Mom.\ 5}{50.00(1+0.10)^{-5}}}_{Mom.\ 0}$$

$\check{s}iandienos\ vert\dot{e} = \$53.79$

Šiandienos rinkos kaina yra \$52.37; taigi, investuotojas norės pirkti šias obligacijas, nes pagal jo arba jos įvertinimą, tai yra "pigu" (išlaidos: €52,37; vertė: €53,79).

Kitas būdas įvertinti šią investiciją gali būti randant grąžos normą (daugmaž kaip IRR, bet obligacijos tai dažniausiai vadinama YTM – Pelningumas termino pabaigoje (Yield to Maturity).

$$\underbrace{52.37}_{\text{0-linio momento kaina}} = \underbrace{6.00 a_{\overline{5}|YTM}}_{\text{Mom. 0}} + \underbrace{\overbrace{50.00(1+YTM)^{-5}}^{\text{Mom. 5}}}_{\text{Mom. 0}}$$

naudojant finansinį skaičiuotuvą ar kompiuterinę skaičiuoklę,
$YTM = 10.73\%$ *(>10%, taigi investuotojui ši investicija pasirodys labai gera).*

Uždaviniai

Materialus investavimas

6.1 – Tikimasi, kad duotoji materiali investicija generuos tokius pinigų srautus (€):

Metai	Investicija	Pinigų srautai
0	- 500.000	
1	- 120.000	80.000
2		120.000
3		300.000
4		250.000
5		100.000

Taip pat tikimasi, kad ši investicija generuos likutinį pinigų srautą €70.000 5-ųjų metų pabaigoje. Tariant, kad norma yra 15% (metinė) kaip įvertintumėte šią investiciją? Kodėl? Kas jeigu norma šiai investicijai įvertinti būtų 12% (metinė)?

(su 15%, neįdomi: NPV = €-19.332; IRR = 13,75%; su 12%, įdomi: NPV = €28.825)

Turtas

6.2 - Mantas tyrinėja galimą investiciją į ABC akcijas, kurios:

. Šiandienos kaina: €3,35
. Numatomi dividendai:
    . Pirmų metų pabaigoje: €0,20
    . Antrų metų pabaigoje: €0,22
    . Trečių metų pabaigoje: €0,23
. Numatoma akcijos kaina trečių metų pabaigoje: €4,15

Jei Mantas nori 12% (metinių) palūkanų ar turėtų jis pirkti šias akcijas?

(taip, nes jam šiandien šios obligacijos vertos €3,46 o jos kainuoja tik €3,35; Arba naudojant IRR: IRR = 13,41%, kuris yra daugiau, negu Mantas nori - 12%, taigi jis nuspręs pirkti)

Obligacijos

6.3 - Aneta galvoja ar turėtų investuoti į Iždo Obligacijas:

. Kaina (šiandien): €54,11
. Nominali vertė: €50,00
. Atpirkimo vertė: €50,00
. Lakšto norma: 8% (metinė)
. Terminas: 4 metai
. Investuotojo norima grąža: 6%

Ar turėtų Aneta pirkti šias obligacijas?

(Ne, nes jai šios obligacijos šiandien yra vertos €53,47 , o jos kainuoja €54,11; arba naudojant IRR: IRR = 5,65%, kas yra mažiau nei Aneta tikisi - 6%, taigi ji nuspręs nepirkti)